Ejemplo de Decaimiento Exponencial Simple.

La datación por carbono **(C^{14}),** se utiliza a menudo para determinar la edad de un fósil. Por ejemplo, se encontró un cráneo humanoide en una cueva de Sudáfrica junto con los restos de una fogata. Los arqueólogos creen que la edad del cráneo es la misma que la de la fogata. Se ha determinado que solo el 2% de la cantidad original de carbono-14 permanece en la madera quemada de la fogata. Estime la edad del cráneo si la vida media del carbono-14 es de unos 5600 años.

Nota: Utilizaremos el color naranja para identificar los resultados a los que se quieren llegar

Para resolver este problema, debemos tomar en cuenta que la cantidad de carbono-14 en un objeto desciende con el tiempo según una tasa proporcional a la cantidad restante, por lo que utilizaremos la ecuación diferencial que describe el decaimiento:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = -ky}$$

Donde:

- ***y*** es la cantidad de carbono-14 en el tiempo ***t***.
- ***k*** es una constante de decaimiento (que depende del tiempo).
- El signo negativo indica que la cantidad de ***y*** disminuye con el tiempo.

k es una constante de decaimiento que es característica del (C^{14}) y está relacionada con su vida media. Aunque la función depende del tiempo, la constante k se calcula a partir de la vida media del (C^{14}). Esta constante varía según el elemento y la velocidad de desintegración de los isótopos radiactivos.

Paso 1: Solución General

La solución a esta ecuación diferencial es:

$$y(t) = y_0 e^{-kt}$$

Donde:

- y_0 es la cantidad inicial de carbono-14.
- ***y(t)*** es la cantidad de carbono-14 en el tiempo ***t***.
- ***k*** es la constante de decaimiento que debemos encontrar usando la vida media del carbono-14.

Esta solución en el **paso 1** se da porque:

$\frac{dy}{dt} = -ky$ se rescribe por el método de variables separables, quedando:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -k$$

Multiplicamos ambos lados por ***dt*** para separar las variables:

$$\frac{1}{y}dy = -k\,dt$$

Se integran ambos lados de la ecuación, para encontrar la expresión de ***y***:

$$\int \frac{1}{y}dy = \int -k\,dt$$

$$ln|y| = -kt + c$$

Donde C es la constante de integración.

Se despeja ***y*** en términos de ***t,*** elevando ambos lados:

$$e^{\ln|y|} = e^{-kt+c}$$

Podemos reescribir e^{kt+c} como:

$$|y| = e^{-kt}.e^{c}$$

Aquí, e^{c} es simplemente otra constante que debemos llamar y_0 (la condición inicial) quedando finalmente:

$$y(t) = y_0 e^{-kt}$$

Paso 2: Relacionar *k* con la Vida Media

1. La vida media (***$t_{1/2}$***) de un material es el tiempo que tarda en reducirse a la mitad de la cantidad de materia o masa del carbono en este caso.

   Los isótopos radiactivos más inestables tienden a decaer más rápidamente, mientras que los más cercanos a un estado estable suelen tener una vida media más larga. Un ejemplo común es el carbono-14, que tiene una vida media de aproximadamente 5730 años (Malik, M. A, 2023).

La relación entre ***k*** y la vida media se expresa como:

$$k = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}$$

Sustituyendo ($t_{1/2}$=5600 años):

$$k = \frac{\ln(2)}{5600} \approx 1.238\, x10^{-4}$$

Paso 3: Determinar el Tiempo *t*.

Sabemos que solo queda el 2% de carbono-14 original, por lo que:

$$\frac{y(t)}{y_0} = 0.02$$

El porcentaje se pasa a su forma decimal para realizar la ecuación.

$$2\% = \frac{2}{100} \approx 0.02$$

Esto implica:

$$0.02 = e^{-kt}$$

Tomamos el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación para despejar ***t***:

$$ln\,(0.02) = \cancel{ln}(\cancel{e}^{-kt})$$

$$ln\,(0.02) = -kt$$

$$\ln(0.02) \approx -3.912$$

Sustituimos $k = \frac{\ln(2)}{5600}$ en la ecuación anterior y resolvemos para t.

$$t = \frac{\ln(0.02)}{-\frac{\ln(2)}{5600}}$$

Calcular $k = \frac{\ln(2)}{5600}$:

$$\frac{\ln(2)}{5600} \approx 0.0001236$$

Encontramos t:

$$t = \frac{-3.912}{-0.0001236} \approx 31605.6$$

Resultado

La edad aproximada del cráneo calculada, usando la desintegración de carbono-14, es de aproximadamente **31,606 años**, suponiendo que la fogata encontrada junto al cráneo tiene la misma antigüedad y que solo el 2% del carbono-14 original permanece en la madera quemada.

Ejercicio modificado, de la página 106 de:

Nagle, K., Saff, E., & Snider, A. (2008). *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems* (5th ed.). Pearson Addison Wesley. pp. 862

Referencia 2

Malik, M. A. (2023). 8.3: Vida media de los radioisótopos. En LibreTexts. https://espanol.libretexts.org/Quimica/Qu%C3%ADmica_Introductoria%2C_Conceptual_y_GOB/Introducci%C3%B3n_a_la_Qu%C3%ADmica_General_(Malik)/08%3A_Qu%C3%ADmica_nuclear/8.03%3A_Vida_media_de_los_radiois%C3%B3topos