Ejemplo de Decaimiento.

Si inicialmente hay 50g de sustancia radioactiva y después de 3 días solo quedan 10g, ¿Qué porcentaje de la cantidad original queda después de 4 días?

Para resolver este problema, se toma en cuenta que la sustancia es radiactiva, por lo tanto, su cantidad disminuye con el tiempo, modelando este proceso con la siguiente ecuación diferencial de decaimiento exponencial:

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

Donde:

- ***y(t)*** es la cantidad de sustancia en el tiempo ***t***.
- ***k*** es una constante de decaimiento
- ***t*** es el tiempo transcurrido.
- El signo negativo indica que la cantidad de ***y*** disminuye con el tiempo.

Paso 1: Solución General

La solución a esta ecuación diferencial es:

$$y(t) = y_0 e^{-kt}$$

Donde:

- ***y0*** es la **cantidad inicial** de sustancia (en este caso, 50 g).
- ***y(t)*** es la cantidad de sustancia después de ***t*** días.
- ***k*** es la constante de decaimiento.

Esta solución en el **paso 1** se da porque:

$\frac{dy}{dt} = -ky$ se rescribe por el método de variables separables, quedando:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -k$$

Multiplicamos ambos lados por ***dt*** para separar las variables:

$$\frac{1}{y}dy = -k\,dt$$

Se integran ambos lados de la ecuación, para encontrar la expresión de ***y***:

$$\int \frac{1}{y}dy = \int -k\,dt$$

$$ln|y| = -kt + c$$

Donde C es la constante de integración.

Se despeja ***y*** en términos de ***t,*** elevando ambos lados:

$$e^{\ln|y|} = e^{-kt+c}$$

Podemos reescribir e^{kt+c} como:

$$|y| = e^{-kt}.e^{c}$$

Aquí, e^{c} es simplemente otra constante que debemos llamar y_0 (la condición inicial) quedando finalmente:

$$y(t) = y_0e^{-kt}$$

Paso 2: Determinar la constante de decaimiento *k*

y0 = 50g

y(t)= y(3)= 10

Se sustituyen estos valores en la solución general para encontrar ***k***:

$$10 = 50e^{-3k}$$

Despejamos e^{-3k}**:**

$$\frac{10}{50} = e^{-3k}$$

$$\frac{1}{5} = e^{-3k}$$

Tomamos el logaritmo natural en ambos lados:

$$\boldsymbol{ln}(\frac{1}{5}) = \cancel{\mathbf{l}}\mathbf{n}\,(\cancel{e}^{-3k})$$

$$\boldsymbol{ln}\left(\frac{1}{5}\right) = -3\boldsymbol{k}$$

Resolvemos para k:

$$\boldsymbol{k} = -\frac{\boldsymbol{ln}(\frac{1}{5})}{3}$$

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{ln}(5)}{3}$$

Paso 3: Calcular y(4)

Ya obtenido el valor de ***k***, podemos usarlo para encontrar la cantidad de sustancia que queda después de 4 días (***y(4))***

$$\boldsymbol{y}(4) = 50\boldsymbol{e}^{-4\boldsymbol{k}}$$

Si $\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{ln}(5)}{3}$, entonces:

$$\boldsymbol{y}(4) = 50\boldsymbol{e}^{-4(\frac{\ln(5)}{3})}$$

$$\boldsymbol{y}(4) = 50\boldsymbol{e}^{-\frac{4\ln(5)}{3}}$$

Paso 4: Simplificar

La expresión se simplifica como:

$$\boldsymbol{y(4) = 50(e^{\ln(5)})^{-\frac{4}{3}}}$$

$$\boldsymbol{y(4) = 50\ (5^{-\frac{4}{3}})}$$

Calculamos $\boldsymbol{5^{-\frac{4}{3}}}$

$$\boldsymbol{y(4) = 50\left(\frac{1}{5^{\frac{4}{3}}}\right) \approx 11.696g}$$

Finalmente, para encontrar el porcentaje restante:

$$\boldsymbol{\frac{y(4)}{y_0}\ (100)}$$

$$\boldsymbol{\frac{11.696}{50}\ (100) \approx 11.7\%}$$

Resultado

El **11.7%** de la cantidad original queda después de 4 días. Esta cifra se obtiene calculando la cantidad restante después de 4 días y luego comparándola con la cantidad original de la sustancia.

Ejercicio modificado, de la página 106 de:

Nagle, K., Saff, E., & Snider, A. (2008). *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems* (5th ed.). Pearson Addison Wesley. pp. 862