

Ejemplo de Crecimiento Exponencial.

Se sabe que un cultivo de bacterias crece a una tasa proporcional a la cantidad presente. Después de 1 hora, se observan 1000 bacterias en el cultivo; y después de 4 horas, 3000 bacterias.

Encontrar:

- a) Una expresión matemática o ecuación para el número bacterias presentes en el cultivo en cualquier momento t .
- b) El número de bacterias que había originalmente en el cultivo.

Para resolver este problema, utilizaremos la ecuación diferencial lineal de primer orden que describe el crecimiento exponencial de la población. La ecuación diferencial para este tipo de crecimiento es:

$$\frac{dy}{dt} = ry$$

Donde:

- y , es el número bacterias en el tiempo t , es decir, y es función de t , $y(t)$.
- r es la tasa de crecimiento poblacional, que indica cómo cambia la población de bacterias proporcionalmente a su tamaño en cada instante de tiempo.

Paso 1: Solución General

La solución general a esta ecuación diferencial es:

$$y(t) = Ce^{rt}$$

Donde C es el valor de población inicial que se determina utilizando las condiciones iniciales dadas en el problema.

Paso 2: Determinación de Constantes

Esta solución en el paso 1 se da porque:

$\frac{dy}{dt} = ry$ se rescribe por el método de variables separables, quedando

$$\frac{dy}{y} = r dt$$

De ahí se integran ambos lados de la ecuación, dando así

$$\ln|y| = rt + C$$

Finalmente se despeja y en términos de t , elevando ambos lados

$$e^{\ln|y|} = e^{rt+C}$$

Quedando finalmente

$$y(t) = Ce^{rt}$$

Utilizaremos las condiciones iniciales dadas en el problema para determinar las constantes **C** y **r**.

En este caso, la condición inicial es que la población observada después de una hora es de 1000 bacterias, es decir, **$y(1)=1000$** . Esta condición nos permitirá encontrar el valor específico de **C**.

1. **Condición inicial 1:**

Si **$t = 1$ hora** entonces **$y(1) = 1000$**

Por lo tanto: **$1000 = Ce^{r(1)}$**

$$1000 = Ce^r$$

2. **Condición inicial 2:**

Si **$t = 4$ horas** entonces **$y(4) = 3000$**

Por lo tanto: **$3000 = Ce^{4r}$**

Nota: Utilizaremos el **verde** para resaltar el proceso que involucra **Ce^{4r}**

Rojo para destacar el cómo se trabaja con el lado que contiene el valor numérico.

Ahora, dividimos la segunda ecuación por la primera para eliminar **C**:

$$\frac{3000}{1000} = \frac{Ce^{4r}}{Ce^r}$$
$$3 = e^{3r}$$

Aplicamos el logaritmo natural (**ln**) en ambos lados y despejamos para resolver **r**:

$$3r = \ln(3)$$

$$r = \frac{\ln(3)}{3}$$

Paso 3: Determinación de C.

Ahora que tenemos r , sustituimos en la primera condición para encontrar C :

$$C = \frac{1000}{e^r} = \frac{1000}{e^{\frac{\ln(3)}{3}}}$$

Como $e^{\frac{\ln(3)}{3}} = 3^{\frac{1}{3}}$ entonces:

$$C = \frac{1000}{3^{\frac{1}{3}}} \approx \frac{1000}{1.442} \approx 693.36$$

Paso 4: Expresión final para $y(t)$

Ahora que tenemos C y r , la expresión final para $y(t)$ es:

$$y(t) = 693.36 * e^{\frac{\ln(3)}{3}t}$$

Paso 5: Calcular $y(0)$

Para encontrar el número de hebras de bacterias al inicio se utiliza $t = 0$:

$$y(0) = 693.36 * e^{\frac{\ln(3)}{3} \cdot 0} = 693.36 * 1 = 693.36$$

Por lo tanto, originalmente había aproximadamente **693** bacterias en el cultivo.

Resultado

a) La expresión para el número de bacterias en cualquier tiempo t es:

$$y(t) = 693.36 * e^{\frac{\ln(3)}{3}t} \quad \text{ó} \quad y(t) = \frac{1000}{\frac{1}{3^3}} * e^{\frac{\ln(3)}{3}t}$$

b) El número de bacterias originalmente en el cultivo ($t=0$) es:

693

Ejemplo recuperado de:

Página 235 del libro Staff of REA. (2000). The Differential Equations Problem Solver. Research and Education Association. USA.