

Ejemplo de Crecimiento Logístico.

Dado que la población de los Estados Unidos en millones fue de **23** en 1850, **76** en 1900 y **151** en 1950, **encontrar r , N_0 , y K** con la formula logística estándar utilizando un millón y un siglo como unidad es para población y tiempo respectivamente. Y seguido comparar el valor proyectado para 1960 a partir de su ecuación con el valor **179** divulgado en el censo de 1960.

Para resolver este problema, iniciaremos con la ecuación diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Paso 1: Solución General

La solución a esta ecuación es:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0}\right)e^{-rt}}$$

Donde:

- N_0 es la población inicial en $t=0$
- K es la capacidad de carga.
- r es la tasa de crecimiento intrínseca.

Nota: Utilizaremos el color **naranja** para para resaltar los resultados que queremos obtener.

El paso 1 se da porque se reconoce como una ecuación diferencial de variables separables.

$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ se describe por el método de variables separables, dividiendo ambos lados por $N\left(1 - \frac{N}{K}\right)$, quedando:

$$\frac{1}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} dN = r dt$$

Puede simplificarse como:

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{(K - N)} dN = r dt$$

De ahí se integran ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{1}{N} dN - \int \frac{1}{(K - N)} dN = r \int dt$$

dando así

$$\ln|y| - \ln|K - N| = rt + C$$

O

$$\ln\left|\frac{N}{K - N}\right| = rt + C$$

Se despeja la variable y en términos de t , elevando ambos lados:

$$e^{\ln\left|\frac{N}{K - N}\right|} = e^{rt + C}$$

$$\frac{N}{K - N} = e^C \cdot e^{rt}$$

Aplicando la condición inicial, $t = 0$, $N(0) = N_0$

$$\frac{N_0}{K - N_0} = e^C$$

Sustituimos e^C que es la constante de integración expresada para la ecuación

$$\frac{N}{K - N} = e^C \cdot e^{rt}$$

$$\frac{N}{K - N} = \frac{N_0}{K - N_0} \cdot e^{rt}$$

Finalmente despejamos a $N(t)$. Multiplicamos ambos lados por $K - N$ y reordenamos los términos para obtener:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0}\right)e^{-rt}}$$

Paso 1: Definir las ecuaciones para los años 1850, 1900 y 1950

Se nos da la población en tres puntos en el tiempo:

- $N_0 = 23$ millones (en 1850).
- $N_{0.5} = 76$ millones (en 1900, medio siglo después o para 0.5).
- $N_1 = 151$ millones (en 1950, un siglo después $t=1$).
- $N_{1.1} = 179$ millones (en 1960, un siglo y una década después $t=1.1$).

Año 1850 ($t=0$):

$$23 = \frac{k}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0} \right) e^{-r(0)}}$$

Año 1900 ($t=0.5$):

$$76 = \frac{k}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0} \right) e^{-r(0.5)}}$$

Año 1950 ($t=1$):

$$151 = \frac{k}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0} \right) e^{-r(1)}}$$

Año 1960 ($t=1.1$):

$$179 = \frac{k}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0} \right) e^{-r(1.1)}}$$

Paso 2: Encontrar K a partir de CR.

Para obtener el valor de K se debe obtener el crecimiento relativo de la población, esto se representa con la ecuación:

$$CR = \frac{N_t}{N_{t-1}}$$

Es necesario establecer la relación entre CR y N_t , pues se observa que este disminuye a medida que la población en el tiempo aumenta:

Año 1900 ($t=0.5$):

$$CR = \frac{76}{23} = 3.30435$$

Año 1950 ($t=1$):

$$CR = \frac{151}{76} = 1.98684$$

Año 1960 ($t=1.1$):

$$CR = \frac{179}{151} = 1.18543$$

Para relacionar CR con N_t debemos establecer una ecuación de acuerdo con la secuencia de los datos:

$$y = CR \quad \text{y} \quad N_t = x$$

coincidiendo con la ecuación de una recta con pendiente negativa de la forma:

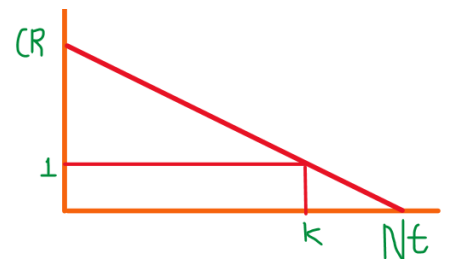
$$CR = a - bN_t$$

Donde:

- “ a ” es la ordenada al origen
- “ b ” la pendiente.

$$CR = a - bN_t$$

Describe la relación lineal entre CR y N_t , que de manera grafica se vería así:



Nota: En la literatura

$$CR = a - bN_t$$

se encontrará comúnmente como:

$$y = mx + b$$

Paso 3: Encontrar a y b para obtener K .

Para obtener b se utiliza la fórmula de la pendiente en línea recta que se calcula a partir de dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) :

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

que en modelo logístico se escribiría como:

$$b = \frac{CR_2 - CR_1}{N_{t_2} - N_{t_1}}$$

Entonces:

$$b = \frac{1.98684 - 3.30435}{151 - 76} = -0.0175668$$

Para obtener a se utiliza la fórmula de la ordenada al origen, por lo que se despeja la ordenada al origen a en $CR = a - b N_t$, obteniendo:

$$a = CR + b N_t$$

$$a = 3.30435 + (0.0175668)(76)$$

$$a = 3.30435 + 1.3350768 = 4.63942029$$

Sustituyendo a y b en $K = \frac{1-a}{b}$:

$$K = \frac{1 - (4.63942029)}{(-0.0175668)} = 207.176053$$

De esta manera para cuando $CR = 1$ es decir, que en ese punto

$$N_t = N_{t-1}$$

lo que implica que la población ya no está creciendo en el tiempo y se ha alcanzado la capacidad de carga K llevando a que

$$N_t = K$$

Por lo que la ecuación

$$CR = a - b N_t$$

se convierte en:

$$K = \frac{1 - a}{b}$$

Despejando K , obtenemos:

En resumen, si $CR=1$ entonces $N_t=K$

Paso 4: Encontrar r .

Para obtener r se tiene que linealizar la ecuación logística $N(t) = \frac{K}{1+Ce^{-rt}}$

$$N(t) = \frac{K}{1+Ce^{-rt}}$$

Despejamos el término que contiene la exponencial:

$$1 + e^{c-rt} = \frac{K}{N(t)}$$

Restamos 1 en ambos lados:

$$e^{c-rt} = \frac{K}{N(t)} - 1$$

Tomamos el logaritmo natural en ambos lados para eliminar la exponencial:

$$\ln(e^{c-rt}) = \ln\left(\frac{K}{N(t)} - 1\right)$$

Lo que simplifica a:

$$C - rt = \ln\left(\frac{K - N_0}{N_0}\right)$$

Nos da una ecuación lineal en t , donde:

- El término $\ln\left(\frac{K-N(t)}{N(t)}\right)$ puede ser considerado como el eje Y .
- El término t es el eje X .
- La pendiente de esta ecuación será r .
- El intercepto en el eje Y será C .

Nota: El término $\left(\frac{K-N_0}{N_0}\right)$, es una constante que depende de los valores iniciales, y se puede simplificar como C , dando lugar a la ecuación compacta

$$N(t) = \frac{K}{1+Ce^{-rt}}$$

Entonces, construimos el vector de valores Y , para esto sustituimos la ecuación

$\ln\left(\frac{K-N(t)}{N(t)}\right)$ con los valores de $N(t)$ que conocemos:

- Para $N_0=23$ cuando $t=0$:

$$Y_0 = \ln\left(\frac{207.17605 - 23}{23}\right) = \ln(8.010263) \approx 2.08040$$

- Para $N_{0.5}=76$ cuando $t=0.5$:

$$Y_{0.5} = \ln\left(\frac{207.17605 - 76}{76}\right) = \ln(1.7273165) \approx 0.54581$$

- Para $N_1=151$ cuando $t=1$:

$$Y_1 = \ln\left(\frac{207.17605 - 151}{151}\right) = \ln(0.37135663) \approx -0.98877$$

Ahora, se utiliza la fórmula de la pendiente para obtener r a partir de los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) :

$$r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En el caso del modelo logístico, y representa el valor $\ln\left(\frac{K - N(t)}{N(t)}\right)$, que ya hemos calculado para cada $N(t)$, y x es el tiempo t . Aplicamos esta fórmula de la siguiente manera:

$$r = \frac{Y_2 - Y_1}{t_2 - t_1}$$

Con los valores obtenidos anteriormente calculamos la pendiente entre los puntos (t_0, Y_0) y (t_1, Y_1)

$$r = \frac{-0.98877 - 2.08040}{1 - 0} = \frac{-3.06917}{1} = -3.069$$

De esta manera, obtenemos que el valor de r , la tasa de crecimiento es aproximadamente $r = -3.070$

Paso 6: Encontrar el valor de la población proyectada para 1960.

Se sustituye los valores de $N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0}\right)e^{-rt}}$ utilizando $N_{1.1}$:

$$N_{1.1} = \frac{207}{1 + \left(\frac{207 - 23}{23}\right)e^{(-3.070)(1.1)}} = 162.5827 \approx 163$$

Resultados:

Los valores obtenidos son:

- $N_0 = 23$ millones
- $K \approx 207.176$
- $r \approx -3.069$

El valor proyectado para 1960 es aproximadamente **163**, mientras que el valor censal fue de **179 millones**.

Ejercicio modificado, de la página 60 del libro:

Betz Burcham (1977). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones. HARLA (Traducción al español). México. (Trabajo original publicado en 1954 como Differential Equations with Applications por Harper & Row, EUA).