Ley de enfriamiento de Newton.

En un experimento se colocó una muestra de una sustancia en un baño de hielo a 41°F para disminuir su actividad. La temperatura inicial de la sustancia es desconocida.

Después de 30 minutos, se registra una temperatura de 46.4°F en la muestra, y al cabo de 40 minutos, la temperatura ha bajado a 42.8°F. ¿Cuál era la temperatura inicial de la muestra en grados Celsius?

Para resolver este ejercicio, utilizaremos la expresión matemática de la ley de enfriamiento de Newton:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

Donde:

- ***T*** es la temperatura de la sustancia.
- ***Ta*** es la temperatura ambiente en el tiempo (***t***).
- **-*k*** es la constante de enfriamiento, que depende de las propiedades del material y el ambiente.

La Ley de Enfriamiento de Newton establece que la tasa de cambio de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo ***T(t)*** y la temperatura del entorno ***Ta(t)*.**

Paso 1: Solución por variables separables.

Identificamos los datos que tenemos:

- Temperatura ambiente: ***Ta***= 41°F
- Temperatura a los 30 minutos: ***T (30)*** =46.4°F
- Temperatura a los 40 minutos: ***T (40)*** =42.8°F

Entonces sustituyendo los valores tenemos la ecuación $\frac{dT}{dt} = -k(T - 41)$, para la solución utilizaremos el método de variables separables:

$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$ se rescribe por el método de **variables separables**, reorganizando los términos de ***T*** y ***t*** a cada lado, esto nos da:

$$\frac{dT}{T - T_a} = -k\,dt$$

puede reescribirse como:

$$\frac{1}{T - T_a}dT = -k\,dt$$

(Usamos el **1 en el numerador** para mostrar que queremos el "inverso" de $T - T_a$, similar a la **forma general de la integral** $\int \frac{1}{u}du$)

De ahí se integran ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{1}{T - T_a}dT = -k\int dt$$

Resolviendo la ecuación da:

$$ln|T - T_a| = -kt + C$$

Para eliminar el logaritmo (Ln), elevamos ambos lados con Euler (***e***)

$$e^{\ln|T - T_a|} = e^{-kt + C}$$

$$T - T_a = e^{-kt}.e^{C}$$

Donde es simplemente otra constante, es decir $e^C = C$:

$$T - T_a = Ce^{-kt}$$

Sabemos que cuando ***t=0***, la temperatura es ***T (0)=T0***. Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$T_0 = T_a + Ce^0$$

$$T_0 = T_a + C$$

Por lo tanto $C = T_0 - T_a$, por lo que la solución general se convierte en:

$$T_{(t)} = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

Paso 2: Determinar k.

Para encontrar la constante de enfriamiento ***k***, sustituiremos los valores dados en el ejercicio en la formula obtenida por variables separadas:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

Donde:

- ***Ta*** es la temperatura del baño de hielo.
- ***T0*** es la temperatura inicial de la muestra.
- ***k*** es la constante de enfriamiento.

Los valores en los tiempos dados ***($T_{(t)}$)*** son:

- A los 30 minutos: ***T (30)* =** 46.4∘F
- A los 40 minutos: ***T (40)* =** 42.8∘F

Sustituyendo dan:

$$46.4 = 41 + (T_0 - 41)e^{-30K}$$
$$42.8 = 41 + (T_0 - 41)e^{-40K}$$

Ahora para despejar k, se tiene que dividir ambas ecuaciones para eliminar ***T₀-41***:

$$\frac{46.1-41}{42.8-41} = \frac{(T_0 \cancel{-41})e^{-30K}}{(T_0 \cancel{-41})e^{-40K}}$$
$$\frac{5.4}{1.8} = e^{10K}$$
$$3 = e^{10K}$$

Para obtener ***k***, tomamos el logaritmo natural de ambos lados:

$$\ln(3) = \cancel{\ln}(\cancel{e}^{10K})$$
$$\ln(3) = 10K$$
$$K = \frac{\ln(3)}{10}$$
$$K = 0.1099$$

Paso 3: Calcular la temperatura inicial (T_0).

Ya teniendo todos los datos se sustituyen en $\boldsymbol{T_{(t)} = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}}$, y se despeja $\boldsymbol{T_0}$:

$$46.4 = 41 + (T_0 - 41)e^{-(0.1099)(30)}$$

$$46.4 - 41 = (T_0 - 41)e^{-(3.297)}$$

$$\frac{5.4}{e^{-3.297}} = T_0 - 41$$

$$\frac{5.4}{e^{-3.297}} + 41 = T_0$$

Usamos la calculadora para obtener el valor de $\boldsymbol{e^{-3.297}}$y sacar el valor de $\boldsymbol{T_0}$:

$$T_0 = \frac{5.4}{0.036994} + 41$$

$$T_0 = 145.9697 + 41$$

$$T_0 = 186.9697$$

Finalmente pasamos el tiempo inicial ($\boldsymbol{T_0}$) a grados Celsius, utilizando la fórmula de °C a °F:

$$T(°C) = (F - 32)\left(\frac{5}{9}\right)$$

$$T(°C) = (186.9697 - 32)\left(\frac{5}{9}\right)$$

$$T(°C) = (154.9697)\left(\frac{5}{9}\right)$$

$$T(°C) = 86°C$$

Resultado:

Se calculó que la temperatura inicial de la muestra era de **186.9697°F**, es decir, **86°C**. Este valor inicial sugiere que la sustancia fue expuesta a una fuente de calor significativa antes de ser introducida en el baño de hielo.

Ejercicio modificado de la página 131 de:

Filio López, E. (2011). *Ecuaciones diferenciales / Isabel Carmona, Ernesto Filio López*. 5° Edición. Addison Wesley.