Ley de enfriamiento de Newton.

Se analiza la resistencia térmica de un cultivo de bacterias termófilas, la cual se enfría desde 100°C (su temperatura inicial elevada por tratamiento) hasta 70°C en 15 minutos al retirarlo de la fuente de calor y colocarlo en el laboratorio, donde la temperatura ambiente es de 20°C. Hallar su temperatura después de 30 minutos.

Para resolver este ejercicio, utilizaremos la expresión matemática de la ley de enfriamiento de Newton:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

Donde:

- ***T*** es la temperatura del cultivo en el tiempo (***t***).
- ***Ta*** es la temperatura ambiente en el tiempo (***t***).
- ***-k*** es la constante de enfriamiento.

La Ley de Enfriamiento de Newton establece que la tasa de cambio de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo ***T(t)*** y la temperatura del entorno ***Ta(t)***.

Paso 1: Solución por variables separables.

Identificamos los datos que tenemos:

- Temperatura inicial: ***T0***=100°C
- Temperatura ambiente: ***Ta***=20°C
- Temperatura a los 15 minutos: ***T(15)***=70°C

Entonces sustituyendo los valores tenemos la ecuación $\frac{dT}{dt} = -k(T - 20)$, para la solución del modelo utilizaremos el método de ecuaciones diferenciales de variables separables:

$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$ se rescribe por el método de **variables separables**, reorganizando los términos de ***T*** y ***t*** a cada lado, esto nos da:

$$\frac{dT}{T - T_a} = -k\,dt$$

puede reescribirse como:

$$\frac{1}{T - T_a}dT = -k\,dt$$

(Usamos el **1 en el numerador** para mostrar que queremos el "inverso" de $T - T_a$, similar a la **forma general de la integral** $\int \frac{1}{u}du$)

De ahí se integran ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{1}{T - T_a}dT = -k\int dt$$

Resolviendo la ecuación da:

$$ln|T - T_a| = -kt + C$$

Para eliminar el logaritmo (Ln), elevamos ambos lados con Euler (***e***)

$$e^{\ln|T-T_a|} = e^{-kt+C}$$

$$T - T_a = e^{-kt}.e^{C}$$

Donde **e** es simplemente otra constante, es decir $e^C = C$:

$$T - T_a = Ce^{-kt}$$

Finalmente, despejamos ***T***, quedando:

$$T = Ce^{-kt} + T_a$$

Paso 2: Determinar C y k.

Tenemos que:

$$T = Ce^{-kt} + Ta$$

Sustituyendo con los datos que tenemos (*T0*=100°C, *Ta*=20°C), para determinar ***C*** queda:

Cuando ***t=0, T=100:***

$$100 = C + 20$$
$$C = 100 - 20$$
$$C = 80$$

Para determinar ***k*** utilizaremos la condición de los 15 min (***T (15)*** =70°C):

Cuando ***t=15, T=70:***

$$70 = 80e^{-15K} + 20$$

Despejamos k para obtener su valor:

$$70 - 20 = 80e^{-15K}$$
$$50 = 80e^{-15K}$$
$$\frac{50}{80} = e^{-15K}$$
$$\frac{5}{8} = e^{-15K}$$
$$\ln\left(\frac{5}{8}\right) = \ln\left(e^{-15K}\right)$$
$$\ln\left(\frac{5}{8}\right) = -15k$$
$$-\frac{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}{15} = K$$

K= 0.031333

Paso 3: Calcular la temperatura en 30 min.

Ya teniendo todos los datos utilizamos ***t=30*** para obtener la temperatura:

$$T = 80e^{-(0.031333)(30)} + 20$$

$$T = 51.25\,°C$$

Resultado:

Se determinó que, al transcurrir 30 minutos desde el inicio del enfriamiento, la temperatura del cultivo es de **51.25°C**.

Ejercicio modificado de la página 131 de:

Filio López, E. (2011). *Ecuaciones diferenciales / Isabel Carmona, Ernesto Filio López*. 5° Edición. Addison Wesley.