

Ejemplos de Crecimiento Exponencial Malthusiano.

En **1980**, el Departamento de Recursos Naturales liberó **1000** truchas híbridas (hibridación de trucha de lago y trucha de río/arroyo) en un lago. En **1987**, se estimó que la población de truchas híbridas en el lago era de **3000**. Utilizando la ley Malthusiana para el crecimiento demográfico, estime la población de truchas híbridas en el lago en el año **2010**.

Para resolver este problema, es importante saber que la ley de Malthus es un modelo de crecimiento poblacional que asume que la **tasa de crecimiento de una población** es proporcional a su **tamaño poblacional**. También cabe señalar que este modelo asume las condiciones ideales de crecimiento sin adversidades como son las presas y límites de espacio y/o alimento.

$$\frac{dy}{dt} = ry$$

Donde:

- **y** es la población de truchas híbridas en tiempo **t**, **y** es función de **t**, es decir **y(t)**.
- **r** es una constante de proporcionalidad que representa la tasa de crecimiento
- **t** es el tiempo.

Paso 1: Solución General

La solución a esta ecuación diferencial es:

$$y(t) = y_0 e^{rt}$$

Donde:

- **y₀** es la cantidad inicial de truchas híbridas.
- **y(t)** es la cantidad de truchas en el tiempo **t**.
- **r** es la tasa de crecimiento.

Esta solución en el **paso 1** se da porque:

$\frac{dy}{dt} = ry$ se describe por el método de variables separables, quedando

$$\frac{1}{y} dy = r$$

Multiplicamos ambos lados por dt para separar las variables:

$$\frac{1}{y} dy = r dt$$

De ahí se integran ambos lados de la ecuación, para encontrar la expresión de $y(t)$:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int r dt$$

$$\ln|y| = rt + C$$

Donde C es la constante de integración.

Finalmente se despeja y en términos de t , elevando ambos lados

$$e^{\ln|y|} = e^{rt+C}$$

Podemos reescribir e^{rt+C} como:

$$|y| = e^{rt} \cdot e^C$$

Aquí, e^C es simplemente otra constante que podemos llamar y_0 (la cantidad inicial) quedando finalmente

$$y(t) = y_0 e^{rt}$$

Paso 2: Determinación de la Constante r .

Sabemos que:

- En 1980 ($t=0$), la población $y(0) = 1000$.
- En 1987 ($t=7$), la población $y(7) = 3000$

Podemos usar estos datos para determinar el valor de r .

Sustituyendo en la ecuación general quedaría:

$t=0$ es la población inicial en 1980.

$t=7$ es la población en 1987 debido a que pasaron 7 años de la población inicial.

$t=30$ es la población en 2010 debido a que pasaron 30 años de

$$3000 = 1000e^{7r}$$

Paso 3: Encontrar r .

Despejando e^{7r} queda:

$$e^{7r} = \frac{3000}{1000} = 3$$

Tomamos el logaritmo natural en ambos lados para resolver r :

$$7r = \ln(3)$$

$$r = \frac{\ln(3)}{7} \approx 0.1569$$

La constante de crecimiento r calculada es aproximadamente **0.1569** por año.

Paso 4: Estimar la Población en 2010.

Una vez que tenemos r , podemos estimar la población para el año 2010 (30 años desde 1980) sustituimos:

$$y(t) = y_0 e^{rt}$$

$$y(30) = 1000e^{30(0.1569)}$$

$$y(30) = 110,868$$



Resultado

La estimación para 2010, según el modelo, es de aproximadamente **110,868** truchas híbridas en el lago.

Ejercicio modificado, de la página 105 de:

Nagle K, Saff E, Snider A. (2008). Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems. Pearson. 5th Edition. USA. pp. 862