

Ejemplo de Crecimiento Exponencial simple.

Si en 1970 se determinó que la población de la Tierra era de 3.500 millones y aumenta a un ritmo del 2% anual, ¿Cuándo se alcanzará una población de 50.000 millones?

Para resolver este problema nos dan la información siguiente:

- **Población inicial (y_0):** 3.5 mil millones ($3.5(10)^9$ en 1970 (año T_0)).
- **Tasa de crecimiento anual (r):** 2% por año.
- **Población objetivo ($y(t)$):** 50 mil millones ($5(10)^{10}$)

Necesitamos encontrar el tiempo t cuando la población alcanzará los 50 mil millones.

Paso 1: Modelar el Crecimiento Exponencial.

El modelo de crecimiento exponencial continuo se describe mediante la ecuación:

$$y(t) = y_0 e^{rt}$$

Donde:

- $y(t)$ es la población en el tiempo t .
- y_0 es la población inicial.
- r es la tasa de crecimiento anual. (2%, o 0.02 en decimal)
- t es el tiempo en años a partir de 1970.

La ecuación que describe el modelo continuo en el **paso 1** se da porque:

$\frac{dy}{dt} = ry$ es la ecuación diferencial básica del crecimiento exponencial. Primero se rescribe por el método de variables separables, quedando

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = r$$

Multiplicamos ambos lados por dt para separar las variables:

$$\frac{1}{y} dy = r dt$$

De ahí se integran ambos lados de la ecuación, para encontrar la expresión de $y(t)$:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int r dt$$

$$\ln|y| = rt + C$$

Donde C es la constante de integración.

Finalmente se despeja y en términos de t , elevando ambos lados

$$e^{\ln|y|} = e^{rt+C}$$

Podemos reescribir e^{rt+C} como:

$$|y| = e^{rt} \cdot e^C$$

Aquí, e^C es simplemente otra constante que podemos llamar y_0 (la cantidad inicial) quedando finalmente

$$y(t) = y_0 e^{rt}$$

Paso 2: Sustitución de Valores.

Sustituimos los valores conocidos en la ecuación:

$$y(t) = y_0 e^{rt}$$

$$50 = 3.5 e^{0.02t}$$

Nota: Las unidades están en miles de millones, por lo que podemos omitir "mil millones" en los cálculos.

Paso 3: Encontrar t .

Primero reorganizamos la ecuación para aislar $e^{0.02t}$ dividiendo ambos lados por $y_0 = 3.5$:

$$e^{0.02t} = \frac{50}{3.5}$$

Ahora tomamos el logaritmo natural en ambos lados para despejar t :

$$\ln(e^{0.02t}) = \ln\left(\frac{50}{3.5}\right)$$

$$0.02t = \ln(14.2857)$$

Despejando t :

$$t = \frac{\ln(14.2857)}{0.02} \approx \frac{2.657}{0.02} = 132.85 \text{ años}$$

Dado que el año inicial es 1970 y queremos calcular en qué año se cumpliría la población, calculamos la suma:

$$1970 + 132.85 \approx 2102.85$$

Respuesta

El tiempo t que toma alcanzar una población de 50 mil millones es de aproximadamente 133 años desde 1970. Por lo que, si la población sigue creciendo a una tasa del 2% anual, se alcanzara dicha cantidad en el año **2103**.

Ejercicio modificado, de la página 233 de:

Staff of REA. (2000). The Differential Equations Problem Solver. Research and Education Association. USA.