**Ejemplo de Crecimiento Logístico.**

Dado que la población de los Estados Unidos en millones fue de **23** en 1850, **76** en 1900 y **151** en 1950, **encontrar** **r, N0, y K** con la formula logística estándar utilizando un millón y un siglo como unidad es para población y tiempo respectivamente. Y seguido comparar el valor proyectado para 1960 a partir de su ecuación con el valor **179** divulgado en el censo de 1960.

Para resolver este problema, iniciaremos con la ecuación diferencial:

Se despeja la variable ***y*** en términos de ***t,*** elevando ambos lados:

Aplicando la condición inicial, t = 0, N (0) =

Sustituimos  que es la constante de integración expresada para la ecuación

Finalmente despejamos a N(t). Multiplicamos ambos lados por 𝐾−𝑁 y reordenamos los términos para obtener:

El paso 1 se da porque se reconoce como una ecuación diferencial de variables separables.

 se rescribe por el método de variables separables, dividiendo ambos lados por **,** quedando:

Puede simplificarse como:

De ahí se integran ambos lados de la ecuación:

 dando así

O

**Paso 1: Solución General**

La solución a esta ecuación es:

Donde:

* ***N0***​ es la población inicial en ***t=0***
* ***K*** es la capacidad de carga.
* ***r*** es la tasa de crecimiento intrínseca.

**Nota:** Utilizaremos el color **naranja** para para resaltar los resultados que queremos obtener.

**Paso 1: Definir las ecuaciones para los años 1850, 1900 y 1950**

Se nos da la población en tres puntos en el tiempo:

* = 23 millones (en 1850).
* = 76 millones (en 1900, medio siglo después o para ***0.5***).
* = 151 millones (en 1950, un siglo después ***t=1***).
* = 179 millones (en 1960, un siglo y una década después ***t=1.1***).

**Año 1850 (t=0):**

**Año 1900 (t=0.5)**:

**Año 1950 (t=1)**:

**Año 1960 (t=1.1)**:

**Paso 2: Encontrar K a partir de CR.**

Para obtener el valor de ***K*** se debe obtener el crecimiento relativo de la población, esto se representa con la ecuación:

Es necesario establecer la relación entre ***CR*** y ***Nt***, pues se observa que este disminuye a medida que la población en el tiempo aumenta:

**Año 1900 (t=0.5)**:

**Año 1950 (t=1)**:

**Año 1960 (t=1.1)**:

Para relacionar ***CR*** con ***Nt*** debemos establecer una ecuación de acuerdo con la secuencia de los datos:

***CR = a – bNt***

Describe la relación lineal entre CR y Nt, que de manera grafica se vería así:

***y = CR*** y ***Nt = x***

coincidiendo con la ecuación de una recta con pendiente negativa de la forma:

 ***CR = a-bNt***

Donde:

* “***a***” es la ordenada al origen
* “***b***” la pendiente.

***Nota:*** En la literatura

***CR = a – bNt***

se encontrará comúnmente como:

**y=mx+b**

**Paso 3: Encontrar *a* y *b* para obtener K.**

De esta manera para cuando ***CR= 1*** es decir, que en ese punto

***Nt = Nt-1***

lo que implica que la población ya no está creciendo en el tiempo y se ha alcanzado la capacidad de carga ***K*** llevando a que

***Nt = K***
Por lo que la ecuación

***CR=a – b Nt***

se convierte en:

Despejando K, obtenemos:

En resumen, si ***CR=1*** entonces ***Nt****=****K***

Para obtener ***b*** se utiliza la fórmula de la pendiente en línea recta que se calcula a partir de dos puntos (***x1,y1***) y (***x2,y2***):

que en modelo logístico se escribiría como:

Entonces:

Para obtener ***a*** se utiliza la fórmula de la ordenada al origen, por lo que se despeja la ordenada al origen ***a*** en ***CR=a – b Nt***, obteniendo:

Sustituyendo ***a*** y ***b*** en :

**Paso 4: Encontrar *r*.**

Para obtener ***r*** se tiene que linealizar la ecuación logística

Tomamos el logaritmo natural en ambos lados para eliminar la exponencial:

Lo que simplifica a:

Despejamos el término que contiene la exponencial:

Restamos 1 en ambos lados:

Nos da una ecuación lineal en t, donde:

* El término puede ser considerado como el eje ***Y***.

**Nota:** El termino**,** es una constante que depende de los valores iniciales, y se puede simplificar como ***C***, dando lugar a la ecuación compacta

* El término t es el eje ***X***.
* La pendiente de esta ecuación será ***r.***
* El intercepto en el eje ***Y*** será ***C***.

Entonces, construimos el vector de valores ***Y***, para esto sustituimos la ecuación con los valores de que conocemos:

* Para **​=23** cuando ***t=0***:
* Para ​=76 cuando ***t=0.5***:
* Para ​=151 cuando ***t=1***:

Ahora, se utiliza la fórmula de la pendiente para obtener ***r*** a partir de los dos puntos (,) y (,):

En el caso del modelo logístico, ***y*** representa el valor , que ya hemos calculado para cada , y ***x*** es el tiempo ***t***. Aplicamos esta fórmula de la siguiente manera:

Con los valores obtenidos anteriormente calculamos la pendiente entre los puntos (,) y (,)

De esta manera, obtenemos que el valor de ***r***, la tasa de crecimiento es aproximadamente ***r=−3.070***

**Paso 6: Encontrar el valor de la población proyectada para 1960.**

Se sustituye los valores de utilizando ***N1.1:***

**Resultados:**

Los valores obtenidos son:

* ***N0= 23 millones***
* ***K≈207.176***
* ***r≈ −3.069***

El valor proyectado para 1960 es aproximadamente **163**, mientras que el valor censal fue de **179 millones**.

Ejercicio modificado, de la página 60 del libro:

Betz Burcham (1977). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones. HARLA (Traducción al español). México. (Trabajo original publicado en 1954 como Differential Equations with Aplications por Harper & Row, EUA).