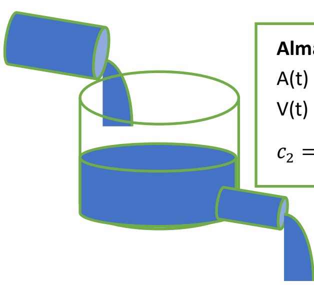
Problemas de Mezclas

La imagen muestra el caso en el que un tanque inicialmente almacena un volumen V_0, en litros, de una solución en la cual están disueltos A_0 gramos de una sustancia química. Hacia dentro del tanque fluye una solución de la misma sustancia a una concentración c_1, con una tasa constante de flujo r_1. Asumiendo que la mezcla se mantiene uniforme por agitación, de tal forma manera que la concentración de la solución en el tanque, c_2, es la misma en todo el tanque y está dada por la expresión.

$$\boxed{c_2 = \frac{A_t}{V_t}} \qquad (1)$$

Entrada:
c_1 (g/L) = concentración de una solución fluyendo hacía adentro del tanque.
r_1 (L/min) = tasa a la que fluye de entrada esta solución.



Almacenamiento:
A(t) = gramos de la sustancia a cualquier tiempo t.
V(t) = Volumen de la solución al tiempo t.
$c_2 = \frac{A_t}{V_t} = Concentración\ de\ lasustancia\ al\ tiempo\ t$

Salida:
c_2 (g/L) = concentración de una solución fluyendo hacía afuera del tanque.
r_2 (L/min) = tasa a la que fluye de salida esta solución.

El problema implica dos funciones que muestran cómo cambia el volumen de la solución (V(t)) y la cantidad de sustancia (A(t)) en función del tiempo. Estas funciones nos permiten conocer la concentración en cualquier momento.

$$c_t = c_2 = \frac{A_t}{V_t} \qquad (1)$$

Durante el intervalo de tiempo Δt, el cambio en el volumen está dado por.

ΔV = lo que entra **–** lo que sale **=** $r_1\Delta\tau$ **–** $r_2\Delta t$ = $(r_1 - r_2)\,\Delta t$ (2)

De manera semejante, para la cantidad de sustancia se tiene que

ΔA = lo que entra – lo que sale ≈ $c_1r_1\Delta t$ – $c_2r_2\Delta t$ **=** $(c_1r_1 - c_2r_2)\Delta t$ (3)

Dividiendo las ecuaciones (2) y (3) entre Δt

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = r_1 - r_2$$

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} \approx c_1 r_1 - c_2 r_2$$

Estas ecuaciones describen las tasas de cambio en cortos intervalos de tiempo, por lo que para considerar las tasas instantáneas de cambio, esto es cuando $\Delta t \rightarrow 0$.

$$\frac{dV}{dt} = r_1 - r_2 \qquad (4)$$

$$\frac{dA}{dt} = c_1 r_1 - c_2 r_2 \qquad (5)$$

Sustituyendo la ecuación (1) en la ecuación (5) se tiene

$$\frac{dA}{dt} = c_1 r_1 - \frac{A}{V} r_2 \qquad (6)$$

La ecuación (4) es una ecuación diferencial de variables separables, cuya solución está dada por.

$$\int dV = (r_1 - r_2) \int dt$$

$V = (r_1 - r_2)t + C$ de donde se tiene que si $t = 0$, $V_0 = C$

$$V_t = (r_1 - r_2)t + V_0 \qquad (7)$$

Solución para calcular el volumen a cualquier tiempo.

Sustituyendo la ecuación (7) en (6) se tiene

$$\frac{dA}{dt} = c_1 r_1 - \frac{A}{(r_1 - r_2)t + V_0} r_2 \qquad (8)$$

Reacomodando la ecuación (8) se llega a la siguiente ecuación lineal

$$\frac{dA}{dt} + \frac{r_2}{(r_1 - r_2)\mathrm{t} + V_0} A = c_1 r_1 \quad \textit{considerar la analogía} \quad A' + P(x)A = Q(x) \qquad (9)$$

La solución de la ecuación (9) permite conocer el valor de la concentración de la sustancia A, en cualquier tiempo.

Recordando que la solución de una ED lineal se obtiene los siguientes pasos.

a) Calcular el factor de integración: $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

b) $y = \frac{1}{\mu(x)} \int Q(x)\mu(x)dx$

En este caso

$$\mu(t) = e^{\int \frac{r_2}{(r_1 - r_2)\mathrm{t} + V_0} dt}$$

Con

$$A = \frac{1}{\mu(t)} \int (c_1 r_1)\mu(t)dt$$

Considerando que la mayoría de los términos son valores constantes es conveniente sustituir valores en la ecuación (9) antes de resolver la ED lineal. Lo que simplifica mucho la solución.