MODELO LOGISTICO

Considérese una población cuyo crecimiento está afectado por el ambiente que le impone un límite superior a su tamaño máximo. Esta limitante puede estar dada por espacio, alimento o zonas de reproducción, entre otros factores del medio. El modelo que considera esta restricción está dado por:

$$\frac{dy}{dt} = ky(A - y)$$

La tasa de cambio es proporcional a la población existente y al valor máximo, A, menos la población existente.

Donde k es una constante positiva, con la variable *y* tomando valores desde 0 hasta un valor máximo A, para $t \geq 0$, esto se representa como: $0 < y < A;\ \ t \geq 0$.

Para resolver esta ecuación se agrupan términos semejantes, de manera que

$$\frac{dy}{y(A - y)} = kdt \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{y(A - y)} = \int kdt$$

Esto conduce a la fa fracción parcial

$$\frac{1}{y(A - y)} = \frac{1}{A}(\frac{1}{y} + \frac{1}{A - y})$$

Por lo que

$$\int \frac{dy}{y(A-y)} = \frac{1}{A}\int(\frac{1}{y} + \frac{1}{A-y})\,dy \ = = \frac{1}{A}\left(\int \frac{1}{y}dy + \int \frac{1}{A-y}dy\right) = = \frac{1}{A}(\ln|y| - \ln|A - y|) + c_1$$

De manera que

$$\int \frac{dy}{y(A - y)} = \int kdt$$

$$\frac{1}{A}(\ln|y| - \ln|A - y|) + c_1 = kt + c_2$$

Multiplicando por (-1), ambos lados de la ecuación

$\ln|A-y| - \ln|y| = -Akt - Ac_2$

$\ln \frac{|A-y|}{|y|} = -Akt - Ac_2$

$\ln \left|\frac{A-y}{y}\right| = -Akt - Ac_2$

$\left|\frac{A-y}{y}\right| = e^{-Akt} e^{-Ac_2}$

Como $0 < y < A$, el cociente $\frac{A-y}{y} > 0$ y se puede omitir el valor absoluto. Si además se agrupan las constantes, de manera que $B = e^{-Ac_2}$. Se tiene, entonces, que.

$\frac{A-y}{y} = Be^{-Akt}$

$A - y = Bye^{-Akt}$

$A = y(1 + Be^{-Akt})$

Por lo que

$$y_t = \frac{A}{1 + Be^{-Akt}}$$

Al considerar $y = f(t)$ se puede generalizar el modelo, de manera que

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-Akt}}$$

Donde se tienen **tres constantes o parámetros: A, B y k** positivas.

Propiedades de $f(t)$

1) $\lim_{t \to \infty} f(t) = A$
2) $f(0) = \frac{A}{1+B}$
3) Punto de inflexión en $t = \frac{1}{Ak} \ln B$