



Ejemplo

En una comunidad de 45,000 habitantes, la tasa de contagio (crecimiento) de una epidemia de gripe es conjuntamente proporcional al número de personas que han contraído la gripe y el número de personas que no se han contagiado.

a) Si 200 personas tienen la gripe al brote de la epidemia 2,800 la tienen después de 3 semanas, obtener un modelo matemático que describa la epidemia.

$A = 45,000$, número máximo de habitantes que pueden contagiarse.

$$\frac{dy}{dt} = ky(45,000 - y) \text{ donde } k = \text{cte}; \text{ con } 0 < y < 45,000, \text{ para } t > 0$$

cuya solución está dada por $y_t = \frac{45,000}{1 + Be^{(-45,000)kt}}$

Para resolver cualquier incógnita se deben calcular los valores de los tres parámetros A, B y k.

- b) ¿Cuántas personas tendrán la gripe después de 5 semanas?
- c) ¿Después de 10 semanas?

Datos dados

t (semanas)	0	3	5	10
y	200	2,800	¿ y_5 ?	¿ y_{10} ?

Para obtener el valor de B, considérese el par de valores $y = 200$ con $t = 0$, entonces

$$y_t = \frac{45,000}{1 + Be^{(-45,000)kt}} \Rightarrow 200 = \frac{45,000}{1 + Be^{(-45,000)(k)(0)}} = \frac{45,000}{1 + Be^0} = \frac{45,000}{1 + B(1)}$$

$$200 = \frac{45,000}{1+B(1)} \Rightarrow (1 + B)200 = 45,000 \Rightarrow 200 + 200B = 45,000$$

$$B = \frac{45,000-200}{200} = 224 \quad \therefore \quad B = 224$$

Para obtener el valor de k se consideran los datos de $y = 2,800$ cuando $t = 3$ se tiene.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA
CARRERA DE BIOLOGÍA

$$y_t = \frac{45,000}{1 + 224e^{(-45,000)kt}} \Rightarrow 2,800 = \frac{45,000}{1 + 224e^{(-45,000)kt}} = \frac{45,000}{1 + 224e^{(-45,000)k(3)}}$$

Por lo que.

$$1 + 224e^{(-45,000)k(3)} = \frac{45,000}{2,800} = 16.07142$$

$$e^{(-135,000)k} = \frac{16.07142 - 1}{224} = 0.067283$$

$$(-135,000)k = \ln(0.067283) \Rightarrow k = \frac{\ln(0.067283)}{-135,000} = 0.00001999 \therefore k = 0.00001999$$

Ya se tienen los tres parámetros del modelo

$$y_t = \frac{45,000}{1 + 224e^{(-45,000)(0.00001999)t}}$$

Solo resta hacer los cálculos para los incisos a) $t = 5$ y c) $t = 10$

$$y_5 = \frac{45,000}{1 + 224e^{(-45,000)(0.00001999)(5)}} = \frac{45,000}{1 + 224(0.011134)}$$

$$y_5 = \frac{45,000}{1 + 2.4940} = \frac{45,000}{3.4940} = 12.879$$

$$y_{10} = \frac{45,000}{1 + 224e^{(-45,000)(0.00001999)(10)}} = \frac{45,000}{1 + 224(0.00012396)}$$

$$y_{10} = \frac{45,000}{1 + 0.027767} = 43.784$$
