Ejemplo

En una comunidad de 8,000 personas, la tasa a la que se difunde un rumor es conjuntamente proporcional al número de personas que lo han escuchado y al número de personas que no lo han escuchado. Cuando 20 personas han escuchado el rumor este se difunde a una tasa de 200 personas por hora.

a) Si inicialmente 4 personas han escuchado el rumor, obtener el modelo matemático que exprese el número de personas que lo han escuchado como una función del número de horas que se ha difundido el rumor.

Determinar el número de personas que han escuchado el rumor después de…

b) 5 min c) 15 min d) 30 min e) 1 hora f) 1 hora 30 min

g) Comprobar que la población completa escuchara el rumor en un tiempo de 2 horas.

a) Sea $f(x)$ la velocidad, en numero de personas, a la cual corre el rumor cuando lo han escuchado x personas. Entonces por la definición de variación conjuntamente proporcional.

$f(x) = kx(8{,}000 - x)$, con A = 8,000

Como el rumor corre a una velocidad de 200 personas por hora, cuando 20 personas lo han escuchado, se sustituye $x = 20$ y $f(x) = \frac{dy}{dt} = 200$, por lo que.

$$f(x) = \frac{dy}{dt} = kx(8{,}000 - x) \Rightarrow 200 = k(20)(800 - 20) = k(20)(7980)$$

Donde con un despeje se puede obtener el valor de k

$$k = \frac{200}{(20)(7980)} = \frac{1}{798}$$

Si se denota la tasa $\frac{dy}{dt}$ en lugar de $f(x)$, la difusión del rumor queda descrita por la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{798}x(8{,}000 - x)$$

Que corresponde a un modelo logístico con $A = 8{,}000$ y $k = \frac{1}{798}$ por lo que la solución se puede expresar como.

$y(t) = \frac{8{,}000}{1+Be^{-8{,}000(\frac{1}{798})t}}$ donde falta obtener el valor del parámetro B.

De acuerdo con el enunciado, $y(0) = 4$, por lo que.

$$4 = \frac{8{,}000}{1 + Be^{-8{,}000(\frac{1}{798})(0)}}$$

$1 + B = 2{,}000$ y $B = 1999$. Ya se tienen los 3 parámetros del modelo, por lo que la solución del modelo está dada por.

$$f(t) = \frac{8{,}000}{1 + 1999e^{-8{,}000\left(\frac{1}{798}\right)t}}$$

Para resolver los incisos

b) 5 min $= \frac{1}{12}$ hora $\Rightarrow f(t) = \frac{8{,}000}{1+1999e^{-8{,}000\left(\frac{1}{798}\right)\left(\frac{1}{12}\right)}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{12}\right) = 9.21 \cong 9$

c) 15 min $= \frac{1}{4}$ hora $\Rightarrow f(t) = \frac{8{,}000}{1+1999e^{-8{,}000\left(\frac{1}{798}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = 48.76 \cong 49$

d) 30 min $= \frac{1}{2}$ hora $\Rightarrow f(t) = \frac{8{,}000}{1+1999e^{-8{,}000\left(\frac{1}{798}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 559.38 \cong 559$

e) 1 hora $\Rightarrow f(t) = \frac{8{,}000}{1+1999e^{-8{,}000\left(\frac{1}{798}\right)(1)}} \Rightarrow f(1) = 7349.50$

f) 1 hora 30 min $\Rightarrow f(t) = \frac{8{,}000}{1+1999e^{-8{,}000\left(\frac{1}{798}\right)\left(\frac{3}{2}\right)}} \Rightarrow f\left(1\frac{1}{2}\right) = 7995.29$

g) 2 horas $\Rightarrow f(t) = \frac{8{,}000}{1+1999e^{-8{,}000\left(\frac{1}{798}\right)(2)}} \Rightarrow f(2) = 7999.96$