Ejemplo:

Si se considera un tanque que contiene 8 L de agua en el cual se disuelven 32 g de una sustancia química. Si a este tanque fluye, a su interior, con tasa de 4 L/min una solución de este químico con una concentración de 2 g/L, mientras que sale una solución bien mezclada a una tasa de 4 L/min fluyendo, hacía el exterior, con una tasa de 2 L/min una solución bien mezclada de este químico.

1.- *Determinar la cantidad el químico en el tanque después de 20 minutos*

2.- *La concentración del químico en el tanque a ese tiempo*

Solución:

Los datos que se tienen son

r_1 = 4 L/min; r_2 = 2 L/min; c_1 = 2 g/L; V(0) = 8 L; A(0) = 32 g

Aplicando la ecuación **(4)**, para los cambios en volumen se tiene.

$$\frac{dV}{dt} = r_1 - r_2 = 4 - 2 = 2$$

$$\int dV = (r_1 - r_2)\int dt \Rightarrow \int dV = 2\int dt \Rightarrow V = 2t + C$$

Si se considera que **V_0 = 8** entonces $\boldsymbol{V_0 = 2(0) + C} \quad => \quad \boldsymbol{C = V_0 = 8}$

$$V_t = 2t + 8 = 2(t+4)$$

Solución del punto 1.

Aplicando la ecuación **(8)** para el cambio en la cantidad de la sustancia química

$$\frac{dA}{dt} = c_1 r_1 - \frac{A}{(r_1 - r_2)t + V_0} r_2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2(4) - \frac{A}{(4-2)t+8}(2) = 8 - \frac{A}{t+4}$$

Reacomodando de acuerdo a la ecuación **(9)** se tiene

$$A' + P(x)A = Q(x) \Rightarrow A' + P(t)A = Q(t) \Rightarrow A' + \frac{1}{t+4}A = 8$$

Resolviendo

$$\mu(t) = e^{\int P(t)dt} = e^{\int \frac{1}{t+4} dt} = e^{\ln(t+4)} = t+4$$

$$A = \frac{1}{\mu(t)} \int Q(t)\mu(t)dt = \frac{1}{t+4} \int 8(t+4)dt = \frac{1}{t+4}\left((8)\frac{(t+4)^2}{2} + C\right)$$

$$A_t = \frac{1}{t+4}\left(4(t+4)^2 + C\right), \text{ como } A(0) = 32 \text{ entonces}$$

$$32 = \frac{1}{0+4}\left(4(0+4)^2 + C\right) \Rightarrow 32(4) = 64 + C \Rightarrow 128 - 64 = C \Rightarrow C = 64$$

Entonces

$$A_t = \frac{1}{t+4}\left(4(t+4)^2 + 64\right)$$

Y con esta expresión se puede calcular la cantidad de A en cualquier tiempo t.

Para t = 20

$$A_t = \frac{1}{t+4}\left(4(t+4)^2+64\right) = \frac{1}{20+4}\left(4(20+4)^2+64\right) = \frac{1}{20+4}\left(4(20+4)^2+64\right)$$

$$A_{20} = \frac{4}{24}\left((24)^2+16\right) = \frac{1}{6}\left((24)^2+16\right) = \frac{(24)^2+16}{6} = \frac{576+16}{6} = \frac{592}{6} = \frac{296}{3}\,g$$

Para contestar el punto 2, recordar que

$$C_t = C_2 = \frac{A_t}{V_t}$$

Considerando que $V_t = 2t + 8 = 2(t+4)$

$$C_2 = C_{20} = \frac{A_{20}}{V_{20}} = \frac{\frac{296}{3}}{2(20+4)} = \frac{\frac{296}{3}}{48} = \frac{296}{3(48)} = \frac{37}{18}\,g/L$$