Un recipiente con agua hirviendo (100°C) se retira del fuego en el instante t = 0 y se deja enfriar en una habitación grande que se encuentra a una temperatura constante de 20°C. Sabiendo que pasados 5 minutos la temperatura del agua se ha enfriado hasta 80°C:

a) Determinar la constante de proporcionalidad k.
b) Determinar el tiempo que tardará el agua del recipiente en descender hasta una temperatura de 30°C.

Solución:

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - T_a)$$

$$\frac{dT}{T - T_a} = -K\,dt$$

$$\int \frac{dT}{T - T_a} = -K \int dt$$

$$\ln(T - T_a) = Kt + C$$

$$e^{\ln(T - T_a)} = e^{-Kt} + C$$

$$T - T_a = C e^{-Kt}$$

$$T = C e^{-Kt} + T_a$$

Ecuación diferencial por variable separable

1. Un recipiente con agua hirviendo (100°C), t = 0.
2. Se enfría a una temperatura constante de 20°C.
3. Pasados 5 minutos la temperatura del agua se ha enfriado hasta 80°C

Sustituir valores en la ecuación general obtenida

$$\frac{dy}{dt} = -K(y-20)$$

$$\frac{dy}{y-20} = -K\,dt$$

$$\int \frac{1}{y-20}\,dy = -K\int dt$$

$$e^{\ln(y-20)} = e^{-Kt+C}$$

$$y-20 = Ce^{-Kt}$$

$$y = Ce^{-Kt} + 20$$

En la expresión de y hay 2 constantes que determinar: k y C.

Para determinarlas disponemos de 2 datos:

y (0) = 100 e y (5) = 80

De 100 °C

$$y(0) = Ce^{-K(0)} + 20 = 100$$

$$C = 100 - 20$$

$$C = 80$$

De 80ºC

$$y(5) = Ce^{-k(5)} + 20 = 80$$

$$e^{-5K} = \frac{80-20}{80}$$

$$\ln^{-5K} = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$-5K = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$K = -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$K = 0.0575$$

Por lo tanto, ahora la función que da la temperatura del agua es:

$$y(t) = 80e^{-0.0575(t)} + 20$$

Ahora se debe averiguar para qué valor de t alcanza y(t) (descendiendo) el valor 30°C, es decir, para qué valor de t se tiene:

$$30 = 80e^{-0.0575(t)} + 20$$

$$e^{-0.0575} = \ln\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$-0.0575(t) = \ln\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$t = \ln\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{0.0575}$$

$$t = 36.1642 \text{ min}$$