

## Modelo Presa-Depredador

Un ejemplo clásico de la modelo presa depredador es el de las población de lince y conejos de un bosque al norte de Canadá. Este ejemplo aparece en muchos textos debido a que hay datos, ya que la compañía Hudson Bay anotó cuidadosamente las capturas de estas dos especies durante varios años. Suponiendo que estas capturas son representativas del tamaño de las poblaciones.

En la tabla 1 se presentan las capturas de lince y conejos entre los años 1900 y 1921.

Tabla 1. Datos para el modelo presa-depredador.

Año	Conejos	Lince
1900	30	4
1901	47.2	6.1
1902	70	9.8
1903	77.4	35.2
1904	36.3	59.4
1905	20.6	41.7
1906	18.1	19
1907	21.4	13
1908	22	8.3
1909	25.4	9.1
1910	27.1	7.4
1911	40.3	8
1912	57	12.3
1913	76.6	19.5
1914	52.3	45.7
1915	19.5	51.1
1916	11.2	29.7
1917	7.6	15.8
1918	14.6	9.7

1920	16.2	10.1
1921	24.7	8.6

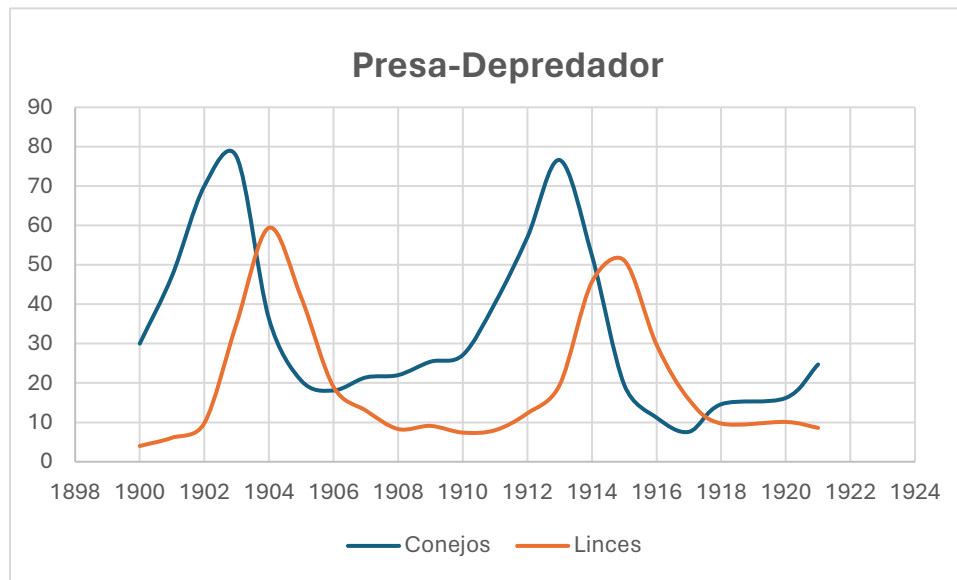
Promedios	38.3818182	24.5416667
tasa r (a1 y b1)	0.39681774	-0.78606215
tasas a2 y b2	0.01616914	0.02048007

Para la modelación es importante considerar dos etapas: 1) La parametrización del modelo y 2) El modelado con Vensim y la simulación de diferentes escenarios.

### **Parametrización.**

- **Paso 1:** Abrir un archivo de Excel para copiar y pegar los datos de la tabla 1.
- **Paso 2:** Seleccionar las tres columnas de datos, para insertar un gráfico de líneas que permita verificar que estos datos corresponden a un modelo presa depredador (figura 1).

**Paso 2.1:** Analizar los ciclos de la población, para apreciar el comportamiento de las presas como alimento de los depredadores y que el comportamiento de la población de depredadores está en función de la disponibilidad de alimento. En este caso, las presas presentan dos ciclos: del tiempo 1 al tiempo 7 y del tiempo 8 al 18. De manera semejante los depredadores presentan dos ciclos: del tiempo 1 al 9 y del 12 al 19, con una aparente estabilidad del tiempo 10 al 11.



**Figura 1. Conejos y lince en el tiempo.**

**Paso 2.2:**

En la gráfica de la figura 1 se deben ubicar los picos (valores máximos) de dos ciclos consecutivos, a partir de los cuales se va a realizar el cálculo de los cuatro parámetros del modelo que se representa en las ecuaciones 1 y 2.

$$\frac{dx}{dt} = a_1x - a_2xy \quad \text{ecuación 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -b_1y + b_2xy \quad \text{ecuación 2}$$

**¿Qué representan estos parámetros?**

$a_1$  = Tasa de crecimiento de las presas.

$a_2$  = Tasa de disminución de presas por el ataque de depredadores.

$b_1$  = Tasa de disminución de depredadores por ausencia de comida (presas).

$b_2$  = Tasa de crecimiento de depredadores por el ataque a presas.

Para la población de conejos, los picos están es el punto 4 (1903, 77.4) y en el punto 14 (1913, 76.6), para la población de lince están en el punto 5 (1904, 59.4) y en el punto 16 (1915, 51.1). De manera que se consideran los datos del punto 4 al punto 14



para obtener el promedio de la población de conejos  $\bar{x}_t$ , y los puntos 5 al 16 de la población de lince para obtener su promedio,  $\bar{y}_t$ .

Aplicando la función promedio en Excel, para ambas columnas, se tienen los siguientes resultados (=PROMEDIO(B5:B15)) y (=PROMEDIO(C6:C17))

$$\bar{x}_t = 38.38$$

$$\bar{y}_t = 24.54$$

### Paso 2.3.

Aplicar las ecuaciones 3 y 4, con los valores de los promedios obtenidos en el paso 2.2.

$$\bar{x}_t = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{ecuación 3}$$

$$\bar{y}_t = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{ecuación 4}$$

Hay que notar que el promedio de la población de conejos se utiliza para calcular los parámetros de la ecuación de lince. Y de manera análoga, el promedio de lince para obtener los parámetros de los conejos.

Hay una ecuación con dos incógnitas, por lo que hay que calcular la tasa de crecimiento, exponencial, de conejos y la tasa de decrecimiento exponencial de lince.

#### Paso 2.3.1. ( $a_1$ y $a_2$ )

La tasa de crecimiento exponencial se representa como  $\frac{dN}{dt} = rN$ , cuya solución está dada por el modelo  $N_t = N_0 e^{rt}$ , por lo que si se consideran dos tiempos consecutivos  $t=1$ .

Para conejos se pueden considerar dos puntos donde el comportamiento de crecimiento exponencial sea notorio. En este caso  $t_0 = (1910, 27.1)$  y  $t_1 = (1911, 40.3)$ . Sustituyendo estos valores en la ecuación 5.

$$N_t = N_0 e^{rt} \quad \text{ecuación 5}$$

$$40.3 = 27.1 e^{r(1)} \quad \text{ecuación 6}$$

Despejando el valor de r de la ecuación 6 se tiene que  $r = \ln\left(\frac{40.3}{27.1}\right) = 0.397 = a_1$ .

En Excel, el comando sería “=LN(B13/B12)” (que son los valores marcados con color rojo).

Por lo que ya se tienen dos elementos de la ecuación 4 y ya es posible obtener  $a_2$  mediante un despeje.

$$\bar{y}_t = \frac{a_1}{a_2}$$

Entonces,  $24.54 = \frac{0.397}{a_2}$ , de manera que  $a_2 = \frac{0.397}{24.54} = 0.016$ . Y se tienen los valores de  $a_1 = 0.397$  y  $a_2 = 0.016$ .

### Paso 2.3.2. ( $b_1$ y $b_2$ )

La tasa de decrecimiento exponencial se representa como  $\frac{dN}{dt} = -rN$ , donde el signo negativo indica que la población disminuye y cuya solución está dada por el modelo  $N_t = N_0 e^{-rt}$ , por lo que si se consideran dos tiempos consecutivos  $t=1$ .

Para lince se pueden considerar dos puntos donde el comportamiento de decrecimiento exponencial sea notorio. En este caso  $t_0 = (1905, 41.7)$  y  $t_1 = (1906, 19)$ .

Sustituyendo estos valores en la ecuación 5.

$$N_t = N_0 e^{rt}$$

$$19 = 41.7 e^{r(1)} \quad \text{ecuación 7}$$

Despejando el valor de r de la ecuación 7 se tiene que  $r = \ln\left(\frac{19}{41.7}\right) = -0.786 = b_1$ . El signo menos indica el decrecimiento.

En Excel, el comando sería “=LN(C8/C7)” (que son los valores marcados con color rojo).

---

Por lo que ya se tienen dos elementos de la ecuación 3 y ya es posible obtener  $b_2$  mediante un despeje.

$$\bar{x}_t = \frac{b_1}{b_2}$$
$$38.38 = \frac{0.786}{b_2} \quad \text{ecuación 8}$$

Se considera solo el valor de  $b_1$ , sin tomar en cuenta el signo menos. Despejando el valor de  $b_2$  de la ecuación 8 se tiene que  $b_2 = \frac{0.786}{38.38} = 0.020$ . Y se tienen los valores de  $b_1 = 0.786$  y  $b_2 = 0.020$ .

Por lo que el modelo dado por las ecuaciones 1 y 2, queda ya parametrizado como se aprecia en las ecuaciones 9 y 10.

$$\frac{dx}{dt} = a_1x - a_2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = -b_1y + b_2xy$$

$$\frac{dx}{dt} = 0.397x - 0.016xy \quad \text{ecuación 9}$$

$$\frac{dy}{dx} = -0.786y + 0.020xy \quad \text{ecuación 10}$$

NOTA: Es importante aclarar que para trabajar con este modelo es común que se supongan valores para cada uno de los cuatro parámetros o que se calculen mediante algún software que aplica soluciones numéricas para obtenerlos. Por cuestiones de enseñanza es importante y necesario que se tengan opciones de cálculo “a mano” para entender los detalles del modelo, considerando que en ecología se parte de datos observados en campo o almacenados en archivos que tienen datos a través del tiempo.

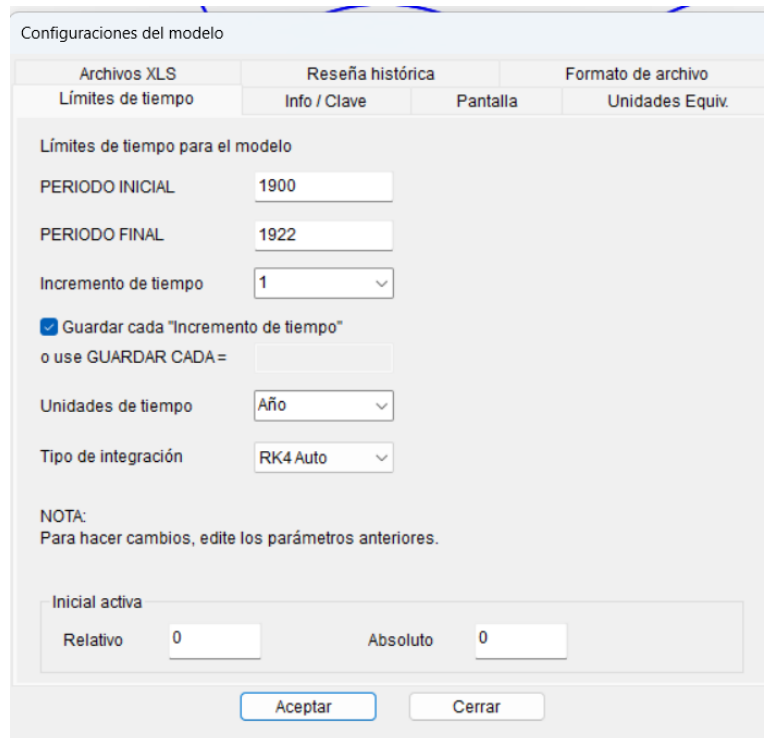
Una vez que se obtienen los parámetros del modelo se procede a trabajar en Vensim.

### Modelo en Vensim

**Paso 3.** Abrir el programa de “Vensim PLE x68” y generar un nuevo modelo en la sección de “Archivo”.

Los datos que se deben colocar en la ventana emergente (figura 2), son:

- Tiempo Inicial: 1900
- Tiempo final: 1922
- Unidades de Tiempo: Año
- Tipo de Integración: RK4 Auto



Configuraciones del modelo

Archivos XLS	Reseña histórica	Formato de archivo
Límites de tiempo	Info / Clave	Pantalla
		Unidades Equiv.

Límites de tiempo para el modelo

PERIODO INICIAL: 1900

PERIODO FINAL: 1922

Incremento de tiempo: 1

Guardar cada "Incremento de tiempo"  
o use GUARDAR CADA=

Unidades de tiempo: Año

Tipo de integración: RK4 Auto

NOTA:  
Para hacer cambios, edite los parámetros anteriores.

Inicial activa

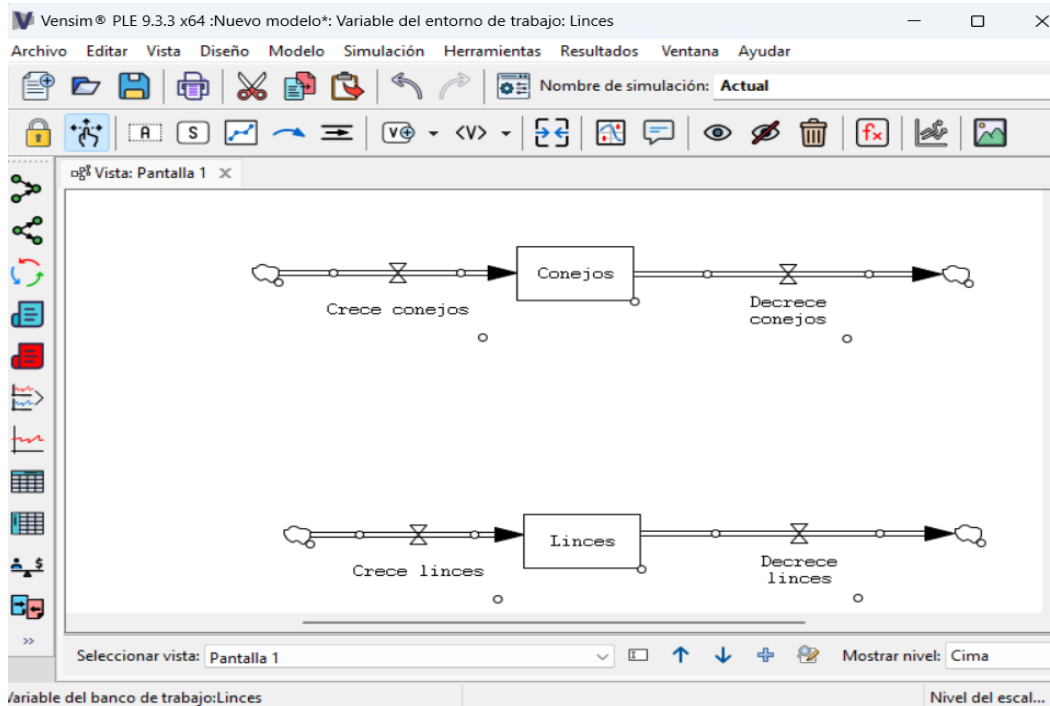
Relativo: 0      Absoluto: 0

Aceptar      Cerrar

**Figura 2.** Ventana de inicio para un nuevo modelo

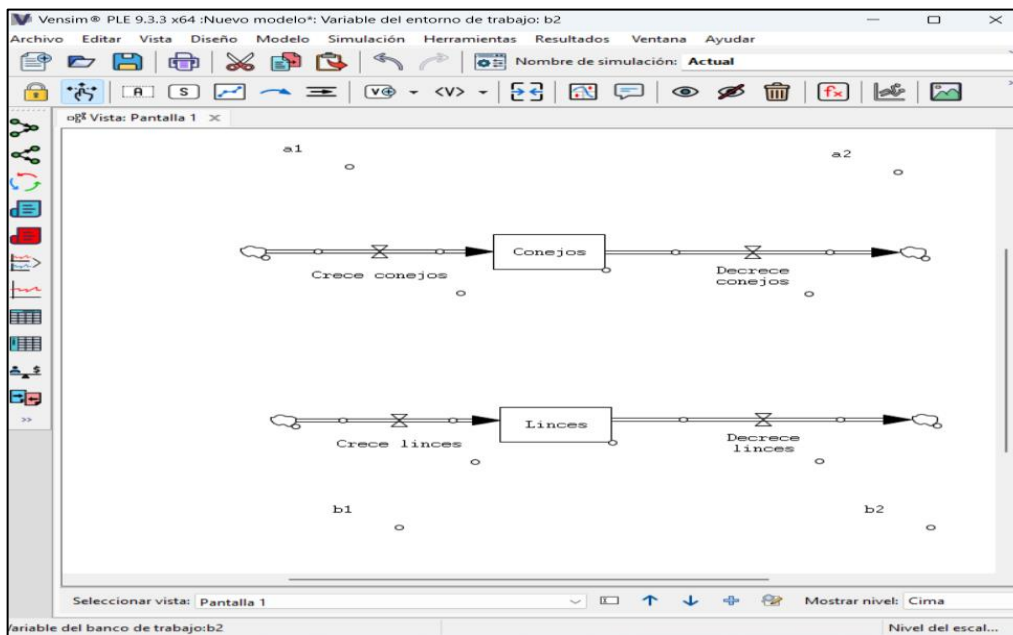
**Paso 4.** Realizar el diagrama de Flujos (figura 3).

- Crear dos Stocks, uno para la población de Conejos y otro para la población Linces.
- Agregar un flujo de entrada y un flujo de salida en cada Stock respectivamente.



**Figura 3. Diagrama de flujos con los stocks conejos y linces**

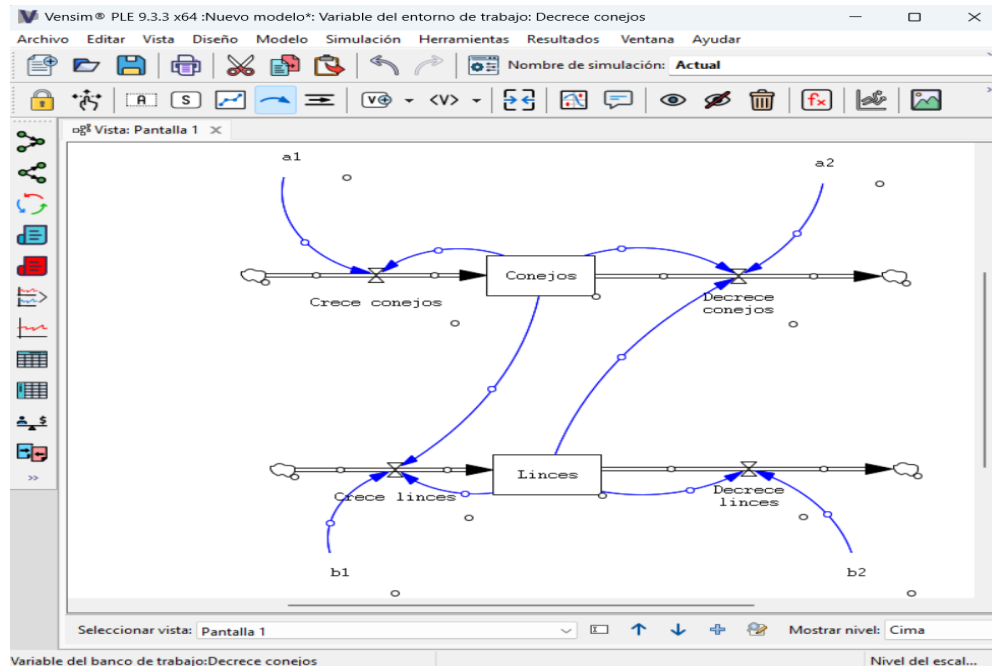
**Paso 5.** Con la herramienta de “Variables”, crear cuatro variables, para los cuatro parámetros del modelo (figura 4).



**Figura 4. Diagrama de flujos y parámetros del modelo, antes de conectar el modelo.**



**Paso 6.** Con la herramienta conectores (flechas) se unirán los componentes del modelo, de acuerdo con la relación establecida en cada una de las ecuaciones del modelo (figura 5).



**Figura 5. Modelo, con todos los componentes conectados.**

De acuerdo con las ecuaciones que definen al modelo, ecuaciones 9 y 10. Hay que considerar que los signos positivos representan flujos de entrada y los negativos corresponden a flujos de salida. También que la variable X corresponde a los conejos (presas) y que la variable Y a los linces (depredadores).

$$\frac{dx}{dt} = 0.397x - 0.016xy$$

$$\frac{dy}{dx} = -0.786y + 0.020xy$$

a1 está asociada con el flujo de entrada de la población de conejos y a2 al flujo de salida. Las operaciones algebraicas se explicitan en el flujo correspondiente.

De forma análoga, b2 está asociada al flujo de entrada de la población de lince y b1 al flujo de salida.

**Paso 7.** Con la herramienta ecuación, figura 6, agregar:

- 1.- Los valores iniciales de los dos stocks, figura 7.
- 2.- Los valores de los parámetros: a1, a2, b1, y b2, figura 9.
- 3.- Sobre los flujos escribir las ecuaciones correspondientes (figura10).



Figura 6. Botón de la herramienta ecuación.

Editar:Conejos

Información de la variable  
Nombre: Conejos

Tipo: Nivel Subtipo:

Unidad:  Revisar  Suplementaria

Grupo:  Min:  Max:

Ecuaciones: Crece conejos-Decrece conejos  
= INTEG (

Valor inicial: 30

Editar una variable  
Todas   
Buscar Modelo   
Nueva variable   
Edición previa   
Salta a Hilite

a1  
a2  
b1  
b2  
Conejos  
Crece conejos  
Decrece conejos

Funciones: Común

Teclado

7	8	9	+	:AND:
4	5	6	-	:OR:
1	2	3	*	:NOT:
0	E	.	/	:NA:
(	)	,	^	<>
>	>=	=	<	<=
f		{	}	
Anular	->	{f()}}		

Variables: Conejos  
Causas: Crece conejos, Decrece conejos

Comentario:

Expandir

Errores: Ecuación modificada

OK Revisar sintaxis Revisar modelo Borrar variable Cerrar Ayuda

Figura 7. Valor inicial de conejos=30.

El valor inicial de conejos es 30 y el de lince 4.

Los componentes del modelo que no tienen valores o que no se han definido se representan en color oscuro, como se aprecia en la figura 8.

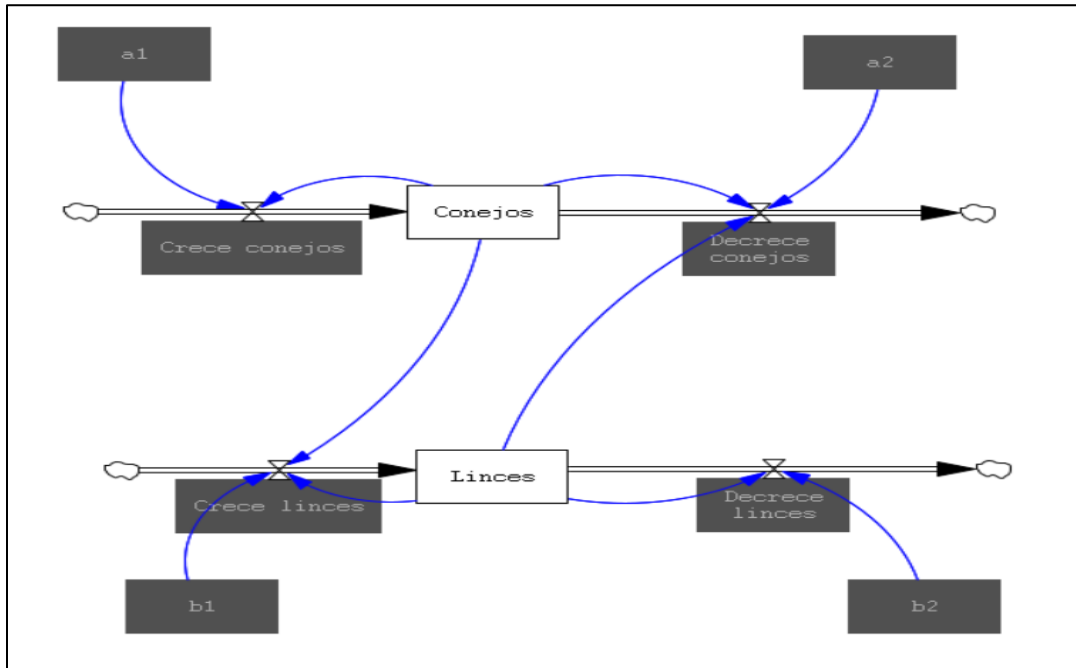


Figura 8. Modelo con los stocks ya definidos.

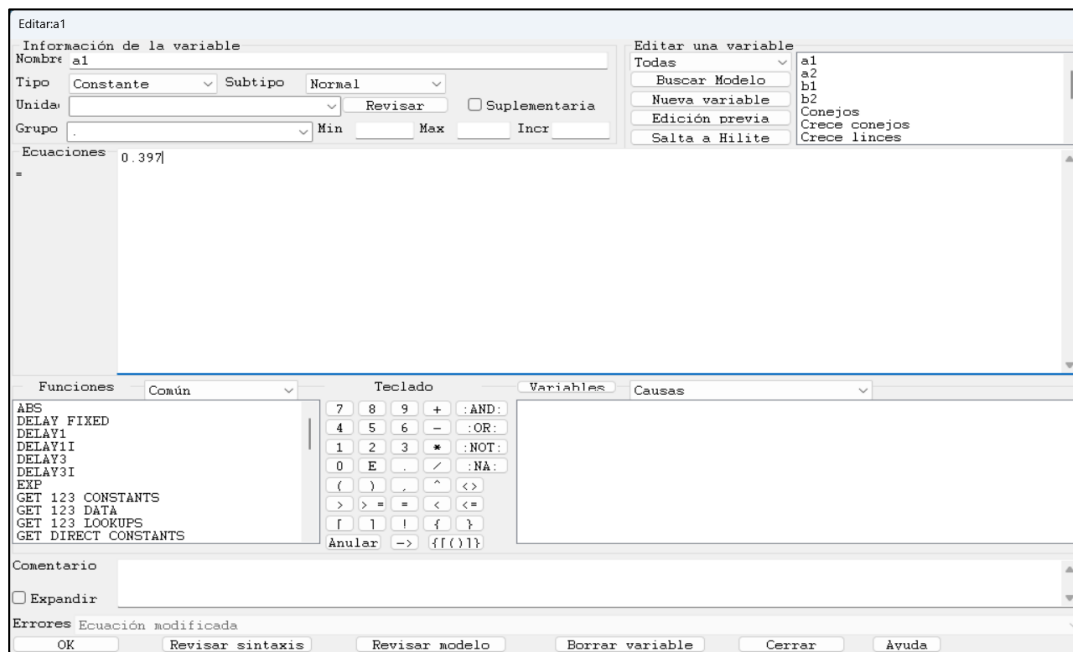


Figura 9. Asignación de valores a los parámetros, en este caso  $a_1 = 0.397$ .

Los cuatro parámetros tienen los valores  $a_1=0.397$ ,  $a_2=0.016$ ,  $b_1 = 0.786$  y  $b_2 = 0.020$ .

Los signos quedan definidos por el tipo de flujo, si es entrada (+), si es de salida (-).

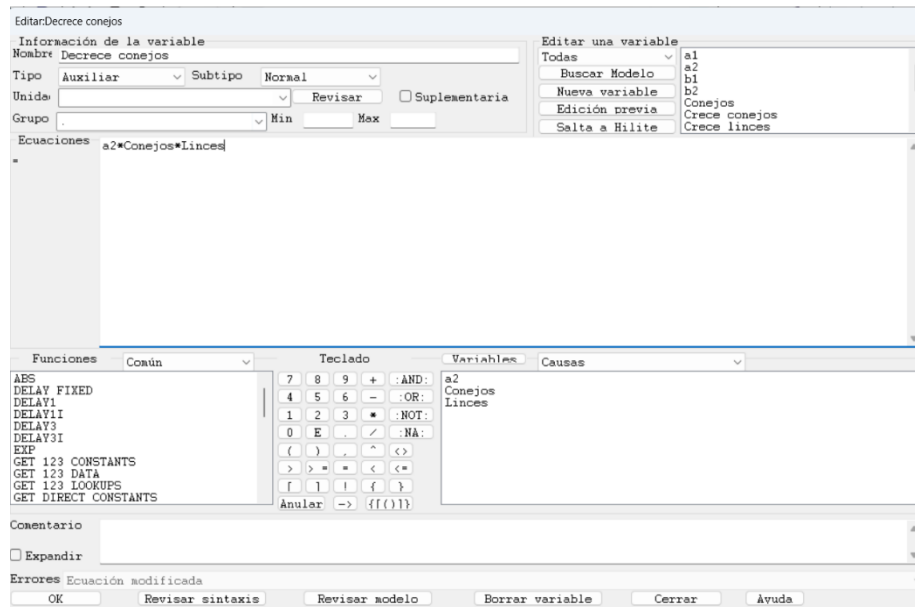


Figura 10. Flujo decrece conejo, con la ecuación  $a_2 \cdot \text{Conejos} \cdot \text{Linces}$ .

**Paso 8.** Guardar y “correr” la simulación con el modelo desarrollado (figura 11).

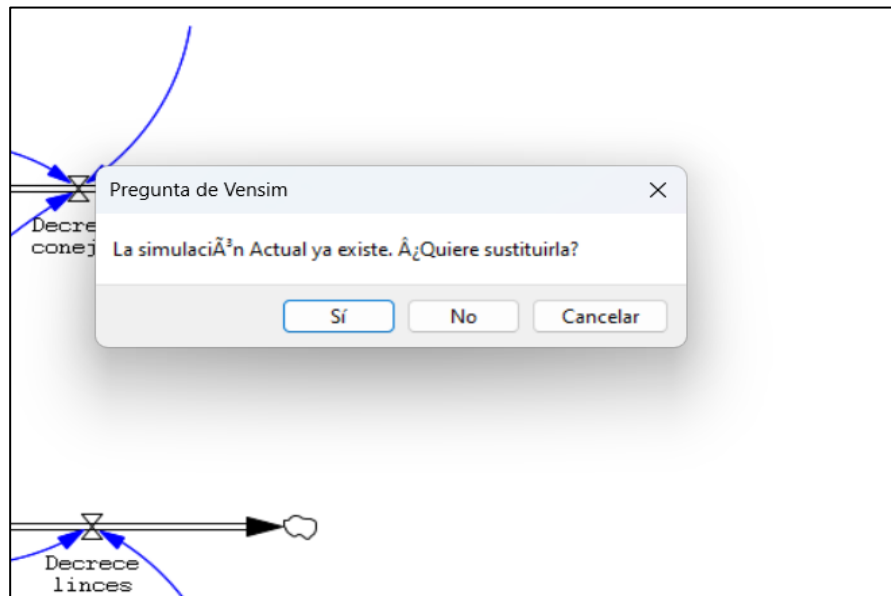


Figura 11. Flujo decrece conejo, con la ecuación  $a_2 \cdot \text{Conejos} \cdot \text{Linces}$ .

Se aprecia “el comportamiento” de cada variable al seleccionar la herramienta simular en cada cambio del cursor (figura 12).

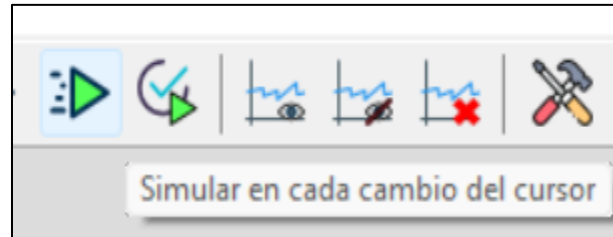


Figura 12. Simular en cada cambio de cursor.

Los resultados de la simulación se aprecian en la figura 13, donde se pueden observar los controladores para modificar los valores de los parámetros sobre la marcha.

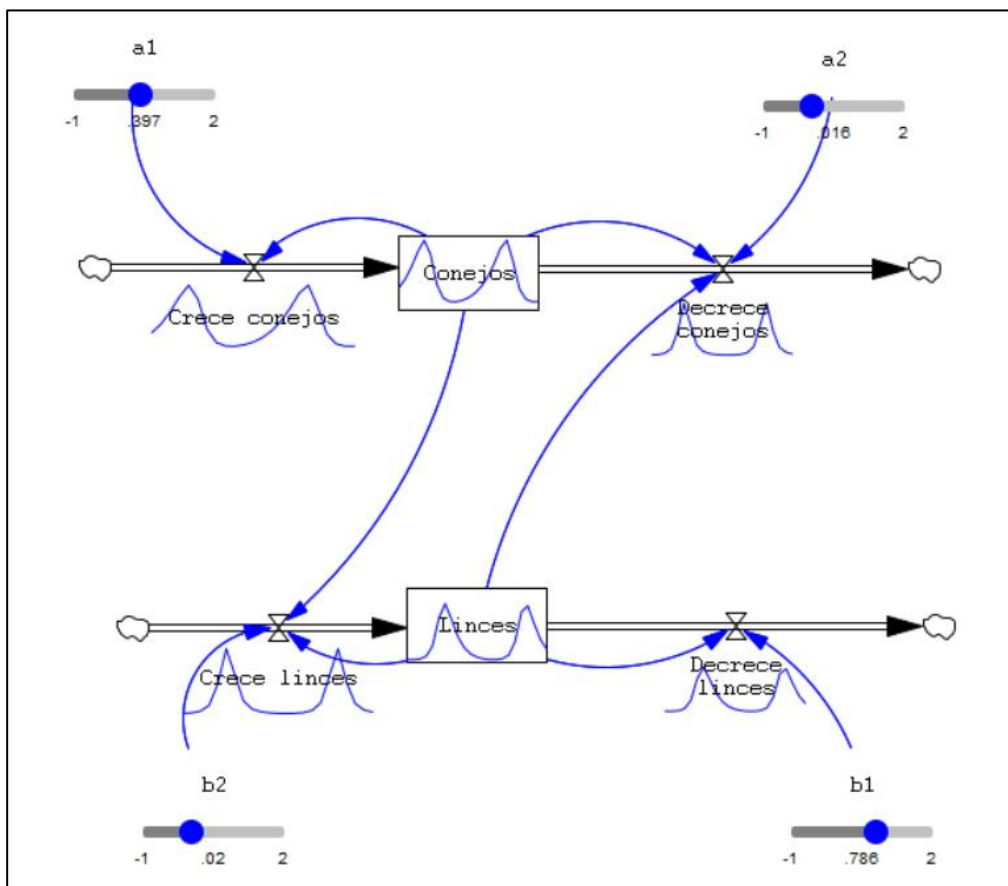


Figura 13. Simulación con botones de control para cada parámetro.

**Paso 9.** Para obtener un gráfico que permita apreciar el comportamiento, tanto de la población de conejos como la población de lince de manera conjunta, dar clic en la herramienta “Mostrar la ventana del panel de control” y seleccionar Gráficos personalizados (figura 14).

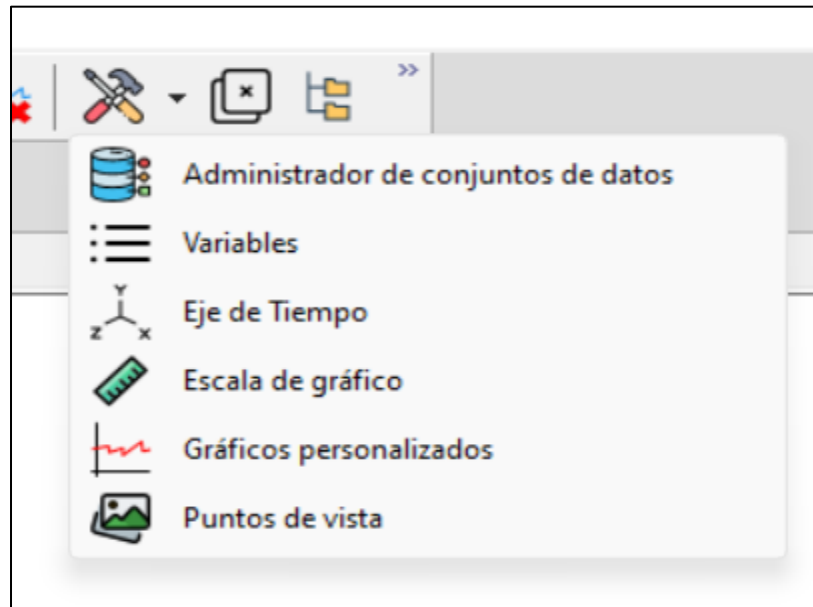


Figura 14. Herramienta para llegar a gráficos personalizados.

Dar clic en “Gráficos personalizados” y seleccionar “Nuevo gráfico”. Aparecerá una ventana en donde se escogerán las dos variables que se desean comparar en la misma gráfica (figura 15).



Figura 15. Seleccionar variables de gráfico personalizados.

Al aceptar aparece un icono con la palabra “GRAPH”, seleccionar la opción de “Mostrar” para ver el gráfico de la figura 16.

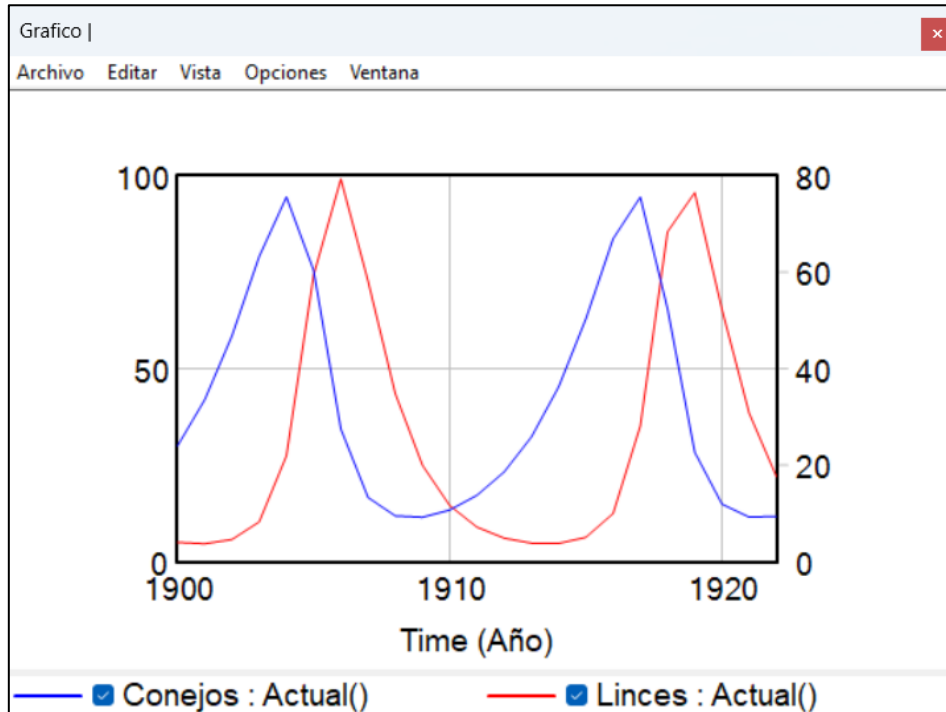


Figura 16. Gráfico de presas y depredadores, ejes con escala diferente.

Sobre este gráfico se realiza el análisis y se obtiene información para la toma de decisiones.

Se puede revisar el código que describe todo el modelo con la herramienta listado total (figura 17).

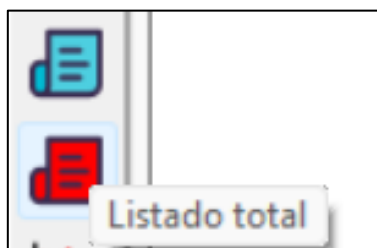
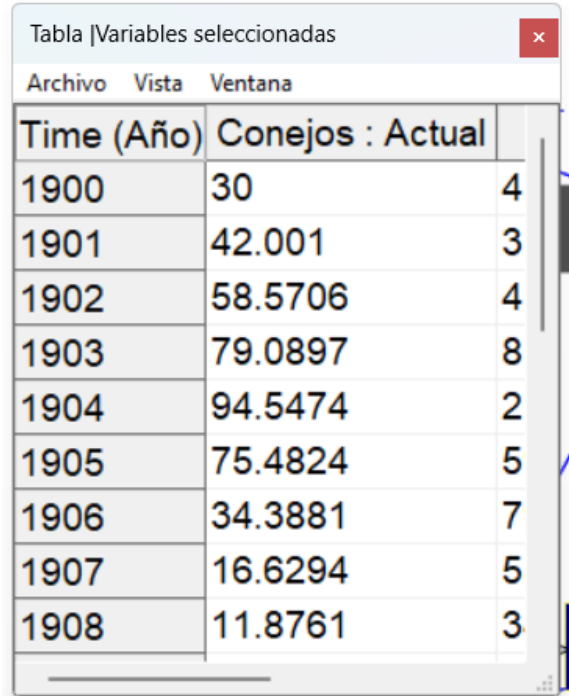


Figura 17. Gráfico de presas y depredadores, ejes con escala diferente.

Se pueden guardar los datos generados por el modelo en una tabla, para realizar comparaciones de datos observados contra modelados, figura 18.



Time (Año)	Conejos : Actual	
1900	30	4
1901	42.001	3
1902	58.5706	4
1903	79.0897	8
1904	94.5474	2
1905	75.4824	5
1906	34.3881	7
1907	16.6294	5
1908	11.8761	3

Figura 18. Datos generados por el modelo.

Es importante resaltar las ventajas de usar este tipo de software, ya que cada stock representa una ecuación diferencial y sus conexiones estructuran un sistema de dos ecuaciones diferenciales que se resuelven de manera simultánea, utilizando métodos numéricos como el de Euler o el de Runge Kutta de orden 4. Lo que convierte la ecuación diferencial en una ecuación en diferencias.

Además hay que resaltar que este modelo, presa-depredador, es la base para el estudio y análisis de procesos más complejos que se presentan en estudios ambientales o ecológicos.