Probabilidad Condicional

1. Se seleccionan dos semillas aleatoriamente, una por una, de una bolsa que contiene 10 semillas de flores rojas y 5 de flores blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que:
   a) la primera semilla sea roja?
   b) la segunda semilla sea blanca si la primera fue roja?

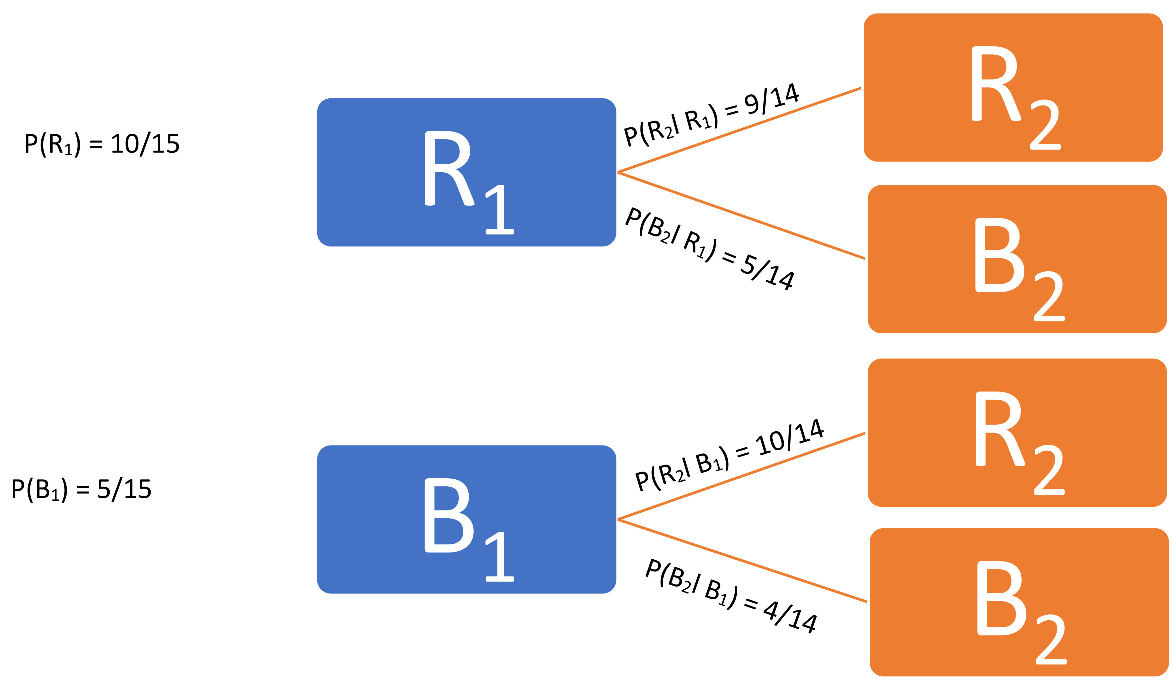
a) La probabilidad de que la primera semilla sea roja es de 10/15 = 2/3. Puesto que hay 10 semillas de flores rojas en un total de 15; es decir $P(R_1) = 10/15 = 2/3$

b) La probabilidad de que la primera semilla sea blanca se ve influenciada por lo que salió primero, es decir, esta probabilidad está sujeta a una condición; la de que la primera semilla sea roja. Este tipo de probabilidad se le llama "probabilidad condicional" y se denota por

$$P(B2\,|R1)$$

que se lee: la probabilidad de B2 dado R1. Esta probabilidad, $P(B2\,|R1) = \frac{5}{14}$, puesto que todavía hay 5 semillas blancas en un total de 14 que quedan.

En diagrama de árbol se vería de la siguiente manera:



2. Una persona lanza una moneda 3 veces, ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 águilas dado que salió por lo menos un águila?

El espacio muestra de lanzar una moneda 3 veces es

S = {aaa, aas, asa, ass, saa, sas, ssa, sss}. El evento A de que por lo menos salió un águila en los tres lanzamientos es:

A = {aaa, aas, asa, ass, saa, sas, ssa}

El evento B de que obtenga 3 águilas es :

B = {aaa}

$$A \bigcap B = \{aaa\}$$

$$P\ (A \bigcap B) = \frac{1}{8}$$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{7}{8}$$

$$P\ (B|A) = \frac{P\ (A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{1}{7}$$

Nótese que $P\ (B|A) = \frac{1}{7}$ es la probabilidad de una ocurrencia en las 7 que son posibles en A; es decir, calcular la probabilidad condicional de B dado A es como calcular la probabilidad de B en relación al conjunto A, como si este fuera un nuevo espacio muestra S* = A

1. Consideremos dos cajas, la caja 1 contiene dos bolitas blancas y 4 bolitas rojas, mientras que la caja 2 contiene 8 blancas y 4 rojas. Se selecciona una caja al azar y luego se saca una bolita al azar. Hallar la probabilidad de que la bolita sea blanca.

Sea A el evento de seleccionar la caja 1 y A^c el evento de seleccionar la caja 2, entonces P(A) = P(A^c) = $\frac{1}{2}$. Sea B el evento de que salga una bolita blanca, entonces $P\ (B|A) = \frac{2}{6}$ y $P\ (B|A^c) = \frac{8}{12}$. Tenemos:

$$P(B) = \frac{1}{2} * \frac{2}{6} + \frac{1}{2} * \frac{8}{12} = \frac{1}{2}$$

Eventos independientes

1. En una escuela al 20% de los alumnos tiene problemas visuales, el 8% problemas auditivos y el 4% tienen tanto problemas visuales como auditivos.

Sean: V = Los que tienen problemas visuales, V^c = Los que no tienen problemas visuales, A = Los que tienen problemas auditivos y A^c = Los que no tienen problemas auditivos.

a) ¿Son los dos eventos de tener problemas visuales y auditivos eventos independientes?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño tenga problemas auditivos si sabemos que tiene problemas visuales?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño no tenga problemas auditivos si tiene problemas visuales?

a) P(V) P(A) = (0.2) (0.08) = 0.016

$$P(V \bigcap A) = 0.04$$

Como $P(V \cap A) \neq P(A)\, P(V)$, A y V no son independientes

b) $P(A|V) = \frac{P\,(A \cap V)}{P(V)} = \frac{0.04}{0.20} = 0.20$

c) $P(A^c|V) = \frac{P\,(A^c \cap V)}{P(V)} = \frac{0.16}{0.20} = 0.80$

Regla de Bayes

1. Un ingeniero químico sabe que cuando se compran etiquetas a un proveedor A, el número de etiquetas defectuosas y no defectuosas están en la relación 1:24; mientras que el proveedor B afirma que la probabilidad de encontrar una etiqueta no defectuosa en su compañía es de 9/10. Si se compra la misma cantidad de etiquetas a ambos proveedores:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea el proveedor B, si se encontró una defectuosa?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea del proveedor A, si se encontró que no es defectuosa?

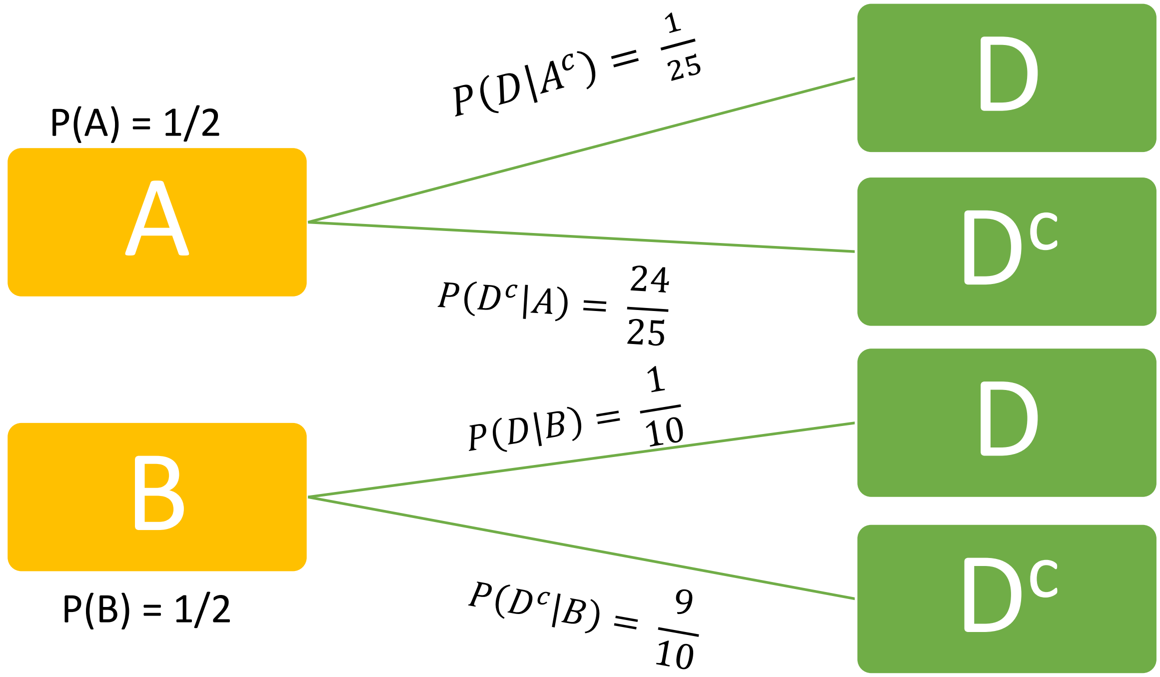
a) $P(B|D) = \frac{P(B)\ P(D|B)}{P(B)\ P(D|B)+P(A)\ P(D|A)} =$

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\frac{1}{25}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{7}{100}} = \frac{10}{14} = 0.7143$$

b) $P(A|D^c) = \frac{P(A)\ P(D^c|A)}{P(A)\ P(D^c|A)+P(B)\ P(D^c|B)} =$

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{24}{25}}{\frac{1}{2}\frac{24}{25}+\frac{1}{2}\frac{9}{10}} = \frac{\frac{24}{50}}{\frac{93}{100}} = \frac{48}{93} = 0.5161$$

Visto con un diagrama de árbol:



2. Supóngase el siguiente juego:

Sea 2 urnas A_1 y A_2, la A_1 con 8 canicas blancas y 2 negras; la A_2 con 3 blancas y 7 negras.

Si se ganan $5,000 cuando se extrae una canica blanca ¿Cuál es la probabilidad de ganar este juego?

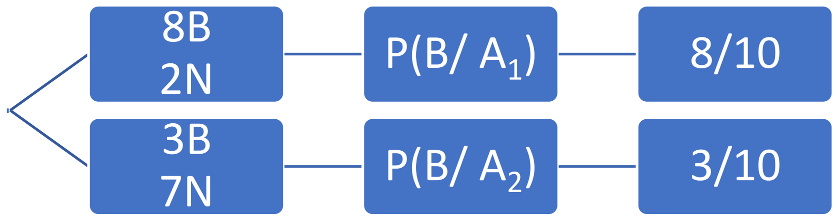
Solución.

Las formas de extraer una canica blanca es:

i. $P(B) = P(A_1 \cap B)$
ii. $P(B) = P(A_2 \cap B)$

$P(B) = P(A_1 \cap B) \cup P(B) = P(A_2 \cap B)$
$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$
$P(B) = P(A_1)\, P(B/ A_1) + P(A_2\;\; P(B/ A_2)$

Como calcular estas probabilidades.



Ahora supóngase que se ha jugado una vez y hemos Ganado ¿Cuál es la probabilidad de que se haya elegido la urna A_1?

$$\frac{8}{11} = P\left(\frac{A_1}{B}\right) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{\mathrm{P}(A_1 \cap \mathrm{B}) + \mathrm{P}(A_2 \cap \mathrm{B})}$$

$$= \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{\mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(\mathrm{B}/A_1) + \mathrm{P}(A_2)\,\mathrm{P}(\mathrm{B}/A_2)}$$

¿La probabilidad de que sea de A_2?

$$\frac{3}{11} = P\left(\frac{A_2}{B}\right) = \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{\mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(\mathrm{B}/A_1) + \mathrm{P}(A_2)\,\mathrm{P}(\mathrm{B}/A_2)}$$

Sean eventos mutuamente excluyentes que ocupan todo el espacio muestral S. Si cada uno de estos eventos tienen probabilidad No nula y uno de ellos debe ocurrir, entonces para todos evento B en el espacio muestral S

$$P\left(\frac{A_1}{B}\right) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{B}}{A_1}\right) + \mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{B}}{A_2}\right) + \cdots + \mathrm{P}(A_k)\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{B}}{A_k}\right)}$$

$$P\left(\frac{A_2}{B}\right) = \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{B}}{A_1}\right) + \mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{B}}{A_2}\right) + \cdots + \mathrm{P}(A_k)\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{B}}{A_k}\right)}$$

Finalmente

$$P\left(\frac{A_k}{B}\right) = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{B}}{A_1}\right) + \mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{B}}{A_2}\right) + \cdots + \mathrm{P}(A_k)\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{B}}{A_k}\right)}$$