Integrales por sustitución

1. $-\ \int (x^2+3)^{-\frac{12}{7}} xdx$

Integral del tipo $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$, con $u = x^2+3$; du = 2xdx y $n = -\frac{12}{7}$

Si du = 2xdx, entonces: $\frac{du}{2} = xdx$, por lo que

$$\int (x^2+3)^{-\frac{12}{7}} xdx = \frac{1}{2}\int (x^2+3)^{-\frac{12}{7}} 2xdx = \frac{1}{2}\int (u)^{-\frac{12}{7}} du$$

Resolviendo con respecto de u

$$\frac{1}{2}\int (u)^{-\frac{12}{7}} du = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{u^{-\frac{12}{7}+1}}{-\frac{12}{7}+1} + c = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{u^{-\frac{5}{7}}}{-\frac{5}{7}} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{7}{5}\right) u^{-\frac{5}{7}} + c$$

$$\frac{1}{2}\int (u)^{-\frac{12}{7}} du = \left(-\frac{7}{10}\right) u^{-\frac{5}{7}} + c$$

Expresando la solución en términos de x.

$$\int (x^2+3)^{-\frac{12}{7}} xdx = \left(-\frac{7}{10}\right)(x^2+3)^{-\frac{5}{7}} + c$$

$\mathbf{2.-\int sen(x^2+4)xdx}$

Integral del tipo $\int \boldsymbol{sen\, u\, du = -\cos u + c}$, con u = x^2 + 4 y du = 2xdx, de manera que $\frac{du}{2} = xdx$ y la integral se puede expresar como.

$$\int sen(x^2+4)xdx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int sen\,(x^2+4)\mathbf{2}xdx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int sen\,(\boldsymbol{u})du$$

Resolviendo con respecto de u

$$\frac{1}{2}\int sen\,(\boldsymbol{u})du = \left(\frac{1}{2}\right) - \cos(u) + c = -\frac{1}{2}\cos(u) + c$$

Expresando la solución en términos de x.

$$\int sen(x^2+4)xdx = -\frac{1}{2}\cos(x^2+4) + c$$

3. $-\int \boldsymbol{sen\sqrt{x^2+4}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx}$

Integral del tipo $\int \boldsymbol{sen\,u\,du = -\cos u + c}$, con $u=\sqrt{x^2+4}=(x^2+4)^{\frac{1}{2}}$, cuya diferencial se obtiene aplicando: $d(u^n)=nu^{n-1}du$

En este caso

$$d\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(x^2+4)^{\frac{1}{2}-1}d(x^2+4)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\,\mathbf{2}xdx=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$$

Por lo que

$$du=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$$

La integral se puede expresar como

$$\int sen\sqrt{x^2+4}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int sen(u)du = -\cos(u)+c$$

Escribiendo el resultado en términos de x, se tiene

$$\int sen\,\sqrt{x^2+4}\;\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = -\cos\sqrt{x^2+4}+c$$

4. $\int \boldsymbol{cos}[(\boldsymbol{x^3}+\mathbf{5})^{\mathbf{9}}]\,\boldsymbol{x^2}(\boldsymbol{x^3}+\mathbf{5})^{\mathbf{8}}\boldsymbol{dx}$

Integral del tipo $\int \boldsymbol{cos\,u\,du} = \mathbf{sen}\,\boldsymbol{u}+\boldsymbol{c}$, con $u=(x^3+5)^9$, cuya diferencial se obtiene con $d(u^n)=nu^{n-1}du$.

Esto es

$$d(u^n)=nu^{n-1}du = d((x^3+5)^9) = 9(x^3+5)^{9-1}d(x^3+5) = 9(x^3+5)^8 3x^2dx$$

De manera que

$si\ du = 27(x^3+5)^8x^2dx \quad entonces\ \frac{du}{27} = (x^3+5)^8x^2dx$ y la integral se puede expresar, con el cambio de variable, como

$$\int cos[(x^3+5)^9]\,x^2(x^3+5)^8dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{27}}\int cos[(x^3+5)^9]\,\mathbf{27}(x^3+5)^8x^2dx$$

$$\int cos[(x^3+5)^9]\,x^2(x^3+5)^8dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{27}}\int \cos(u)\,du = \left(\frac{1}{27}\right)sen(u)+c$$

Regresando a la expresión en términos de x

$$\int cos[(x^3+5)^9]\,27x^2(x^3+5)^8dx = \frac{1}{27}sen(x^3+5)^9+c$$