Ejemplos de integrales por sustitución o cambio de variable

1.- $\int (\boldsymbol{x^2+1})^{\mathbf{10}}\mathbf{2}\boldsymbol{xdx}$

Esta integral tiene la forma: $\int \boldsymbol{u^n du} = \frac{\boldsymbol{u^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{c}$, donde u = (x^2 + 1); n = 10 y aquí es donde está el truco: du = d(x^2 + 1)dx = (2x + 0)dx. Por lo que $\int (x^2+1)^{10}2xdx$ se puede reescribir como $\int u^{10}du$, donde ya se puede aplicar la fórmula de integración. De manera que.

$$\int (x^2+1)^{10}2xdx = \int u^{10}du = \frac{u^{10+1}}{10+1} + c = \frac{(x^2+1)^{11}}{11} + c$$

Original (x) $\xrightarrow{\text{Cambio de variable (u)}}$ $\xrightarrow{\text{Regreso a la variable original (x)}}$

Recordando que: u = (x^2 + 1); n = 10 y du = 2xdx

2.- $\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} (\boldsymbol{x^2+1})^{\mathbf{10}}\mathbf{2}\boldsymbol{xdx}$ Es la misma integral del ejemplo 1, pero ahora como integral definida.

Solución **a) Resolviendo en la variable que se sustituye**

$$\int_1^2 (x^2+1)^{10}2xdx = \int_2^5 u^{10}du$$

Si u = x^2 + 1, los límites de integración, con el cambio de variable, están dado por

Inferior u = 1^2 +1 = 2

superior u = 2^2+1=5

Resolviendo la integral:

$$\int_2^{10} u^{10}du = \left[\frac{u^{11}}{11}\right]_2^5 = \frac{5^{11}}{11} - \frac{2^{11}}{11} = \frac{48828125}{11} - \frac{2048}{11} = 4438920\frac{5}{11} - 186\frac{2}{11} = 4438734\frac{3}{11}\ u^2$$

F(b) – F(a)

Solución **b) Resolviendo en la variable original**

Recuperando la solución del ejemplo 1.

$$\int (x^2+1)^{10} 2x dx = \int u^{10} du = \frac{u^{10+1}}{10+1} + c = \frac{(x^2+1)^{11}}{11} + c$$

$$\int_1^2 (x^2+1)^{10} 2x dx = \left[\frac{(x^2+1)^{11}}{11}\right]_1^2 = \frac{(2^2+1)^{11}}{11} - \frac{(1^2+1)^{11}}{11} = \frac{5^{11}}{11} - \frac{2^{11}}{11}$$

F(b) – F(a)

3.- $\int \boldsymbol{x(x^2+1)^{10} dx}$

Seguimos con la misma integral, nada más que ahorita tiene otro acomodo, recordando que.

u = x^2 +1; n = 10; du = 2xdx y que $\frac{du}{2}$ = xdx

Se ve que **du** NO se encuentra representada en la función y que acomodando términos sólo se logra un **xdx** y faltaría el número 2.

Si $\int x(x^2+1)^{10} dx = \int (x^2+1)^{10} \boldsymbol{x} dx$, para completar **dx** se pueden agregar números, pero nunca se deben agregar variables, por lo que si falta un 2.

$$\int (x^2+1)^{10} \boldsymbol{x} dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \int (x^2+1)^{10} \boldsymbol{2x} dx$$

La función no se altera, ya que se ha multiplicado por 1, pues $\frac{1}{2}(2) = 1$. Entonces, todo número que se agrega debe ser neutralizado por su inverso.

$$\int x(x^2+1)^{10} dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \int (x^2+1)^{10} \boldsymbol{2x} dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \int u^{10} du = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \left(\frac{u^{11}}{11}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{11}}{11}\right] + c$$

4.- $\int_5^8 \sqrt{3x+1}\,dx$ **La fórmula a aplicar es** $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

u = 3x+1; n = $\frac{1}{2}$; du = 3dx; y $\frac{du}{3} = dx$

u para límite inferior: u = 3(5) + 1 = 16

u para límite superior: u = 3(8) + 1= 25

$$\int_5^8 (3x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3}\int_5^8 (3x+1)^{\frac{1}{2}} 3dx = \frac{1}{3}\int_{16}^{25} u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_{16}^{25} = \frac{1}{3}\left[\frac{(3x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_5^8$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{(3x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_5^8 = \left[\frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3}\right]_5^8 = \frac{2}{9}\sqrt{(3(8)+1)^3} - \frac{2}{9}\sqrt{(3(5)+1)^3}$$

F(b) – F(a)

$$= \frac{2}{9}(125) - \frac{2}{9}(64) = \frac{250-128}{9} = \frac{122}{9} = 13\frac{5}{9}\,u^2$$

5.- $\int_{-3}^{3} \sqrt{7+2t^2}\,(8t)dt$

u = 7 + 2t^2; n= $\frac{1}{2}$; du = 4tdt y 2du = 8tdt

u para límite inferior: u = 7 + 2(-3)^2 = 25

u para límite superior: u = 7 + 2(3)^2 = 25

$$\int_{-3}^{3} \sqrt{7+2t^2}\,(8t)dt = 2\int_{-3}^{3} (7+2t^2)^{\frac{1}{2}} 4tdt = 2\int_{25}^{25} (u)^{\frac{1}{2}} du = 2\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_{25}^{25}$$

$$= 2\left[\frac{(7+2t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{3} = \left[\frac{4}{3}\sqrt{(7+2t^2)^3}\right]_{-3}^{3}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{(7+2(3)^2)^3} - \frac{4}{3}\sqrt{(7+2(-3)^2)^3} = 0$$

Las dos cantidades son iguales, por lo que $\int_{-3}^{3} \sqrt{7+2t^2}\,(8t)dt = 0$

6.- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{cos^2 xsenxdx}$

u = cos(x); n = 2; du = - sen(x)dx y - du = sen(x)dx

u para límite inferior: u = cos(0) = 1

u para límite superior: u = cos($\frac{\pi}{2}$) = 0

Recordar que 2π=360º; π=180º y $\frac{\pi}{2} = 90^0$ y que cos(x) = eje de las x's y sen(x) = eje de las y's.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 xsenxdx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 x(-senx)dx = -\int_1^0 u^2 du = -\left[\frac{u^3}{3}\right]_1^0 = -\left[\frac{cos^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{cos^3 \frac{\pi}{2}}{3} - \left(-\frac{cos^3 0}{3}\right) = -\frac{0^3}{3} + \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}$$

F(b) – F(a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 xsenxdx = \frac{1}{3}\, u^2$$

7.- $\int \boldsymbol{xcos(x^2+4)\sqrt{sen(x^2+4)}dx}$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

Si $u = sen(x^2+4)$ $\quad n = \frac{1}{2}$

Para la diferencial

$$\frac{d(sen(u))}{dx} = \cos(u)\frac{d(u)}{dx}$$

$$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{d(u)}{dx}$$

$$du = cos(x^2+4)\, d(x^2+4)$$

$$du = cos(x^2+4)2xdx$$

$$\int xcos(x^2+4)\sqrt{sen(x^2+4)}\, dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{sen(x^2+4)}\, cos(x^2+4)2xdx$$

$$\int xcos(x^2+4)\sqrt{sen(x^2+4)}\, dx = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{2}\int sen^{\frac{1}{2}}(x^2+4)\, cos(x^2+4)2xdx$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{sen^{\frac{1}{2}+1}(x^2+4)}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)u^{\frac{3}{2}} + c = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)sen^{\frac{3}{2}}(x^2+4) + c$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{u^3} + c = \left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{sen^3(x^2+4)} + c$$

Por lo tanto

$$\int xcos(x^2+4)\sqrt{sen(x^2+4)}dx = \left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{sen^3(x^2+4)} + c$$

8.- $\int \frac{z\cos(\sqrt[3]{z^2+3})}{(\sqrt[3]{z^2+3})^2}dz$ $\qquad$ $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + c$

Con $u = \sqrt[3]{z^2+3} = (z^2+3)^{\frac{1}{3}}$ para la integral

Para la diferencial

$$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{d(u)}{dx}$$

Con $u = z^2+3 \quad y \quad n = \frac{1}{3}$

$$du = \left(\frac{1}{3}\right)(z^2+3)^{\frac{1}{3}-1}d(z^2+3)$$

$$du = \left(\frac{1}{3}\right)(z^2+3)^{\frac{1}{3}-1}2zdz$$

$$du = \left(\frac{1}{3}\right)(z^2+3)^{-\frac{2}{3}}2zdz = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{2z}{(\sqrt[3]{z^2+3})^2}dz$$

$$\int \frac{z\cos(\sqrt[3]{z^2+3})}{(\sqrt[3]{z^2+3})^2}dz = \left(\frac{3}{2}\right)\cos(\sqrt[3]{z^2+3})\left(\frac{1}{3}\right)\frac{2z}{(\sqrt[3]{z^2+3})^2}dz$$

$$\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + c$$

$$\int \frac{z\cos(\sqrt[3]{z^2+3})}{(\sqrt[3]{z^2+3})^2}dz = \left(\frac{3}{2}\right) sen(\sqrt[3]{z^2+3}) + c$$