Ejemplo. Calcular la superficie o área de la región R acotada por la parábola $y = f(x) = x^2$ el eje x y la recta vertical x=2.

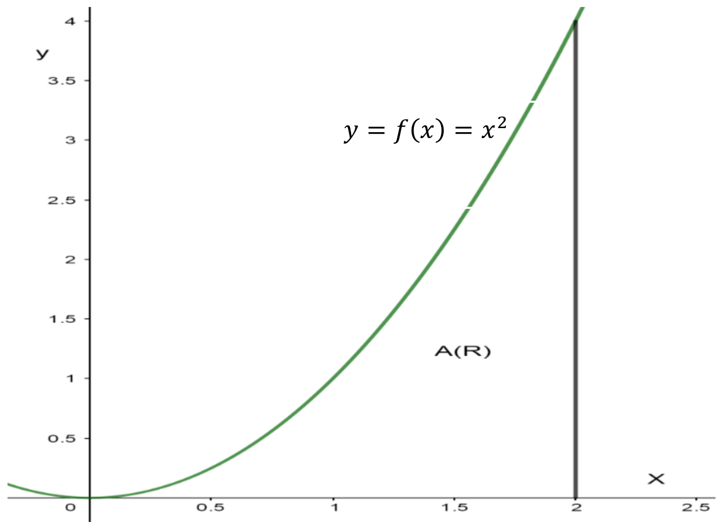


Figura 4. Lo que se busca es el área de la región R, A(R).

Se tienen dos opciones: **a)** por rectángulos inscritos $A = f(x_{i-1})\,\Delta x$ o **b)** por rectángulos circunscritos $A = f(x_i)\,\Delta x$.

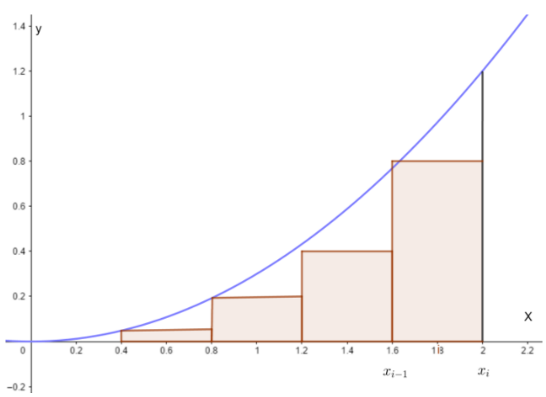


Figura 5a. Inscritos, donde hay un cálculo por defecto, ya que no se considera el hueco entre la función y los rectángulos. La altura está dada por el valor de f(x) que está hacía la izquierda del rectángulo, $A = f(x_{i-1})\,\Delta x$.

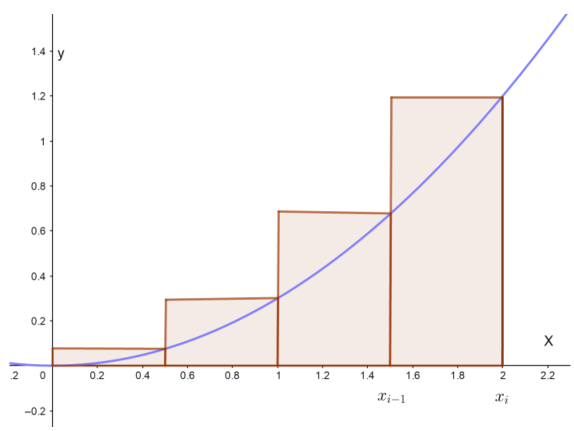


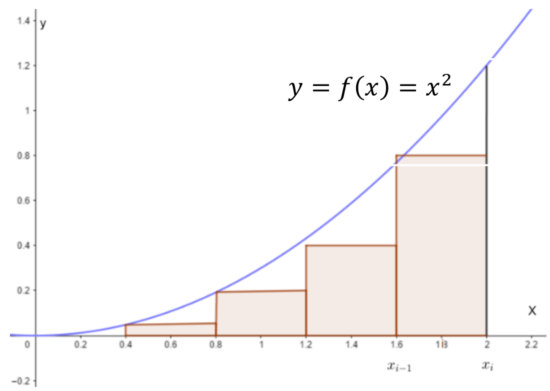
Figura 5b. Circunscritos, donde hay un cálculo por exceso, ya que la altura del rectángulo excede los valores de la función f(x). La altura está dada por el valor de f(x) que está hacía la derecha del rectángulo, $A = f(x_i)\,\Delta x$.

a) Rectángulos inscritos, para calcular el área A(R)

Como primer paso se divide el intervalo [0,2] en n subintervalos, cada uno de ellos con longitud $\Delta x = \dfrac{2}{n}$

Por lo que:

$$x_0 = 0$$
$$x_1 = \Delta x = \frac{2}{n}$$
$$x_2 = 2\Delta x = 2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n}$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{x_i = i\Delta x = i \cdot \frac{2}{n} = \frac{2i}{n}}$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1} = (n-1)\Delta x = (n-1)\frac{2}{n} = \frac{(n-1)2}{n}$$
$$\vdots$$
$$x_n = n\Delta x = n \cdot \frac{2}{n} = 2$$



Donde es de especial interés la regla de correspondencia de **x_i** la cual se utiliza para el manejo de la función, f(x).

Entonces, el área A(Rn) se puede calcular al sumar las áreas de todos estos n rectángulos, considerando que entre más rectángulos se tengan más preciso será el cálculo.

A(Rn) = $f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x$

Recordando que: **$f(x) = x^2$; $x_i = \frac{2i}{n}$**; **$\Delta x = \frac{2}{n}$**. Por lo que:

$$A_i = f(x_i)\Delta x = x_i^2 \Delta x = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3} i^2$$

Y la suma de estas áreas está dada por

$$\sum_{i=0}^{n} A_i = \frac{8}{n^3}(0^2) + \frac{8}{n^3}(1^2) + \frac{8}{n^3}(2^2) + \ldots \frac{8}{n^3}(n-1)^2$$

$$\sum_{i=0}^{n} A_i = \frac{8}{n^3}[(0^2) + (1^2) + (2^2) + \ldots (n-1)^2]$$

Aplicando la suma especial ii) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{8}{n^3}\left[\frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6}\right]$

$\sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{8}{n^3}\left[\frac{(n-1)(n)(2n-2+1)}{6}\right]$

$\sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{8}{n^3}\left[\frac{(n^2-n)(2n-1)}{6}\right] = \frac{8}{n^3}\left(\frac{2n^3-3n^2+n}{6}\right)$

$\sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{4}{3}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$

Este resultado es una primera aproximación al cálculo del área, pues hay que recordar los huecos que hay entre los rectángulos y la curva de la función. Por lo que una mucho mejor aproximación consiste en incrementar el número de rectángulos, lo que se expresa como.

$$A(R) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{n^3}[(0^2) + (1^2) + (2^2) + \ldots (n-1)^2]\right)$$

$$\therefore\ A(R) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3} + 0 + 0 = \frac{8}{3}\, u^2$$

b) Rectángulos circunscritos, para calcular el área A(R)

El área está dada por **A_i = $f(x_i)\Delta x$.** Al igual que con rectángulos inscritos se tiene que cada Ai = $f(x_i)\ \Delta x = x_i^2 \Delta x = \left(\frac{8}{n^3}\right) i^2$ de manera que:

$\sum_{i=1}^{n} A_i$ = f(x_1) Δx + f(x_2) Δx + … + f(x_n) Δx   Se suma de 1 hasta n

$= \left[\frac{8}{n^3}(1^2) + \frac{8}{n^3}(2^2) + \cdots + \frac{8}{n^3}(n^2)\right]$

$= \frac{8}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2]$

$= \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{8}{n^3}\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right] = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$

$$\therefore\ A(R) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3} + 0 + 0 = \frac{8}{3}\, u^2$$