# ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES

## DEFINICIÓN

UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE VARIABLES SEPARABLES TIENE LA FORMA $f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$, DONDE CADA DIFERENCIAL TIENE COMO COEFICIENTE UNA FUNCIÓN DE SU PROPIA VARIABLE, O UNA CONSTANTE.

MÉTODO DE SOLUCIÓN: INTEGRACIÓN DIRECTA

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = 0$$

## Ejemplo

Resolver $e^{x+y}\,y' = x$, para $y(0) = \ln 2$

$$e^{x} \cdot e^{y} \frac{dy}{dx} = x$$

$$e^{y}\,dy = x\,e^{-x}\,dx$$

$$\int e^{y}\,dy = \int x\,e^{-x}\,dx$$

$$\int e^{u}\,du = e^{u} + c$$

$\int x e^{-x}\,dx$ por partes

$$\int x e^{-x}\,dx = -x e^{-x} - e^{-x} + c$$

$e^{y} = -x e^{-x} - e^{-x} + c$ ← SOLUCIÓN IMPLÍCITA

$e^{y} = e^{-x}(-x-1) + c$, aplicando Ln

$y = \ln|e^{-x}(-x-1) + c|$, ← SOLUCIÓN EXPLÍCITA para $y(0) = \ln 2$

$\ln 2 = \ln|e^{-0}(-0-1) + c|$

$\ln 2 = \ln|1(-1) + c|$, aplicando exponencial

$2 = -1 + c$ ∴ $c = 2 + 1$, $\boxed{c = 3}$

Solución implícita $e^{y} = -x e^{-x} - e^{-x} + 3$

Solución explícita $y = \ln|e^{-x}(-x-1) + 3|$

Ejemplo

Resolver $xyy' = 1+y^2$, cuando $y(1)=3$

1.- Separar variables

$$xy\frac{dy}{dx} = 1+y^2$$

$$\frac{y\,dy}{1+y^2} = \frac{dx}{x}$$

2.- Integrar

$$\int \frac{y\,dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$\int \frac{du}{u} = \ln|u|$

Si $u = 1+y^2$ $du = 2y\,dy$

Si $u = x$ $du = dx$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2y\,dy}{1+y^2} = \ln|x| + c$$

$$\frac{1}{2}\ln|1+y^2| = \ln|cx|$$

$\ln|1+y^2|^{1/2} = \ln|cx|$ , aplicando exponencial

$|1+y^2|^{1/2} = cx$ , elevando al cuadrado

$$1+y^2 = c^2x^2 \Rightarrow 1+y^2 = cx^2$$

$cx^2 - y^2 = 1$ ← Solución implícita.

$c(1)^2 - 3^2 = 1 \Rightarrow c-9=1 \Rightarrow c = 1+9 \Rightarrow \underline{c=10}$

Soln: $\underline{10x^2 - y^2 = 1}$

## Ejercicio

Resolver $\operatorname{sen} x \cos^2 y\, dx - \cos x \operatorname{sen} y\, dy = 0$

1.- Separar variables

$$\operatorname{sen} x \cos^2 y\, dx = \cos x \operatorname{sen} y\, dy$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos^2 y} dy$$

2.- Integrar

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \int \frac{\operatorname{sen} y}{\cos^2 y} dy$$

$\int \frac{du}{u} = \operatorname{Ln}|u|$

Si $u = \cos x \quad du = -\operatorname{sen} x\, dx$

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$

$\int \cos^{-2} y\, dy = \frac{\cos^{-2+1} y}{-2+1} = \frac{\cos^{-1} y}{-1}$

$u = \cos y \quad du = -\operatorname{sen} y\, dy$

$$-\int \frac{-\operatorname{sen} x\, dx}{\cos x} = -\int \cos^{-2} y (-\operatorname{sen} y)\, dy$$

$$-\operatorname{Ln}|\cos x| = -(-\cos^{-1} y) + C$$

$$-\operatorname{Ln}|\cos x| = \frac{1}{\cos y} + C$$

$$-\operatorname{Ln}|\cos x| = \sec y + C \quad \leftarrow \text{Solución gral implícita}$$

# ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

## DEFINICIÓN

Polinomios homogéneos son aquellos en los que todos los TÉRMINOS son DEL MISMO GRADO

Ejemplo.

¿Es un polinomio homogéneo? y de que grado

a) $\underbrace{x^2y}_{2+1} + \underbrace{8xy^2}_{1+2} - \underbrace{x^3}_{3} + \underbrace{y^3}_{3}$ HOMOGÉNEO ← LOS CUATRO TERMINOS SON DE GRADO 3

b) $\underbrace{xyz^2}_{1+1+2} - \underbrace{x^2y^2}_{2+2}$ ← HOMOGÉNEO DE GRADO 4.

OTRA DEFINICIÓN

LA ECUACIÓN DIFERENCIAL HOMOGÉNEA ES DE LA FORMA

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

DONDE M y N TIENEN LA PROPIEDAD DE QUE PARA TODA $t>0$, LA SUSTITUCIÓN DE $x$ POR $tx$ Y LA DE $y$ POR $ty$ HACEN QUE M y N SEAN DEL MISMO GRADO $n$.

$$M(tx,ty) = t^n M(x,y)$$
$$N(tx,ty) = t^n M(x,y)$$

Ejemplo: DETERMINAR SI ES HOMOGÉNEA Y EL GRADO DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN: $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy} \Rightarrow xy\,dy = (x^2+y^2)dx$$

$M(x,y) = x^2+y^2$ $\quad$ $N(x,y) = xy$

$M(tx,ty) = (tx)^2+(ty)^2 = t^2(x^2+y^2)$ 2º GRADO

Si $N(tx, ty) = tx\,ty = t^2xy$ es de segundo grado.

HOMOGÉNEA, GRADO 1.

Otro ejemplo

Determinar si $f(x,y) = 2\sqrt{xy} + x$ es homogénea

$$f(tx, ty) = 2\sqrt{(tx)(ty)} + t(x)$$

$$= 2\sqrt{t^2xy} + tx$$

$$= 2t\sqrt{xy} + tx \Rightarrow t\left(2\sqrt{xy} + x\right)$$

HOMOGÉNEA, GRADO 1.

Ejercicios

a) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$

$$f(tx,ty) = \sqrt{tx+ty} = \sqrt{t(x+y)} = t^{1/2}\sqrt{x+y}$$

HOMOGÉNEA, GRADO 1/2

b) $f(x,y) = x^3 + x^2y + y$

$$f(tx,ty) = (tx)^3 + (tx)^2(ty) + ty$$

$$= t^3x^3 + t^2x^2 \cdot ty + ty$$

$$= \underset{3}{t^3}x^3 + \underset{3}{t^3}x^2y + \underset{1}{t}y \longrightarrow \text{NO ES HOMOGÉNEA}$$

DEFINICIÓN: LAS ECUACIONES DIFERENCIALES TAMBIEN TIENEN LA FORMA $\frac{dy}{dx} + g(u) = 0$ CON $u = f(x,y)$.

MII, UIII, C2 5/8/2019

MÉTODO DE SOLUCIÓN. USANDO SUSTITUCIONES ALGEBRAICAS APROPIADAS, LAS ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS SE CONVIERTEN EN ECUACIONES DE VARIABLES SEPARABLES. UNA DE LAS SUSTITUCIONES MÁS COMUNES ES:

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux$$

<u>Ejemplo</u>

Resolver la ecuación diferencial $(x^2+y^2)dx - xydy = 0$

1.- $[(tx)^2+(ty)^2]dx - (tx\,ty)dy = 0$

$$(t^2x^2+t^2y^2)dx - t^2xy\,dy = 0$$

$$t^2(x^2+y^2)dx - t^2xy\,dy = 0$$

$$t^2[(x^2+y^2)dx - xy\,dy] = 0$$ Homogénea, grado 2.

2.- sustituir $y = ux$ $\quad dy = udx + xdu$, en la EDH

$$u = \frac{y}{x}$$

$$(x^2+(ux)^2)dx - x(ux)(udx+xdu) = 0$$

$$(x^2+u^2x^2)dx = ux^2(udx+xdu)$$

3.- Separar variables

$$x^2(1+u^2)dx = ux^2(udx+xdu)$$

$$(1+u^2)dx = u(udx+xdu)$$

$$= u^2dx + ux\,du$$

$$(1+u^2)dx - u^2dx = ux\,du$$

$$(1+u^2-u^2)dx = ux\,du$$

$$\frac{dx}{x} = u\,du$$

4.- Integrar

$$\int\frac{dx}{x} = \int u\,du \Rightarrow \ln|x| = \frac{u^2}{2} + C$$

5.- Regresar a vars. originales $\Rightarrow \boxed{\ln|x| = \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} + C}$ (Solu. Gral

M II, U III, C2 6/8/2019

Ejemplo

Resolver $xy' = y - x$

$$x\frac{dy}{dx} = y - x \qquad x\,dy = (y-x)\,dx$$

1.- ¿Homogénea?

$$tx\,dy = (ty - tx)\,dx$$

$$tx\,dy = t\,(y-x)\,dx \qquad \text{Homogénea, grado 1}$$

2.- Sustituir $u = \frac{y}{x}$ $\quad y = ux \quad dy = u\,dx + x\,du$

$$x(u\,dx + x\,du) = (ux - x)\,dx$$

3.- Separar variables

$$x(u\,dx + x\,du) = x\,(u-1)\,dx$$

$$u\,dx + x\,du = (u-1)\,dx$$

$$x\,du = (u-1)\,dx - u\,dx$$

$$= \cancel{u\,dx} - dx - \cancel{u\,dx}$$

$$x\,du = -dx$$

$$du = -\frac{dx}{x}$$

4.- Integrar

$$\int du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$u = -\ln|x| + C$$

5.- Regresar a vars. originales

$$\frac{y}{x} = -\ln|x| + C \qquad \text{Soln. implícita}$$

$$y = -x\ln|x| + Cx \qquad \text{Soln explícita}$$

MII, UIII, C2 7/8/2019

## Ejercicio

$$y' = \frac{3x+y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x+y}{x}$$

$$x\,dy = (3x+y)\,dx$$

1.- Homogénea

$$(tx)\,dy = (3tx + ty)\,dx$$

$$t\,(x\,dy) = t\,(3x+y)\,dx$$ Homogénea, Grado 1.

2.- Sustituir $u = \frac{y}{x}$ $y = ux$ $dy = u\,dx + x\,du$

$$x\,(u\,dx + x\,du) = (3x + ux)\,dx$$

3.- Separar variables $x\,(u\,dx + x\,du) = x\,(3+u)\,dx$

$$u\,dx + x\,du = (3+u)\,dx$$

$$x\,du = (3+u-u)\,dx$$

$$x\,du = 3\,dx$$

$$du = 3\,\frac{dx}{x}$$

4.- Integrar $\int du = 3\int \frac{dx}{x} \Rightarrow u = 3\ln|x| + C$

5.- Regresar a variables originales

$$\frac{y}{x} = 3\ln|x| + C$$ Sol. implícita

$$y = 3x\ln|x| + Cx$$ Sol. explícita.

TAREA PÁG. 96 ; 2.22 a 2.35

MII, UIII, C2, 8/8/2019